Gauß Algorithmus, Lösung linearer Gleichungssysteme

Gauß Algorithmus

i) Eingabe: Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n, m; K)$, Vektor $b \in K^n$.

ii) Initialisierung: $A^{(1)} = A, b^{(1)} = b$

iii) Für $k = 1, \dots, \min(n, m) - 1$ führe aus

Gilt $a_{kk}^{(k)} = 0$, finde Zeile $i > k$ mit $a_{ik}^{(k)} \neq 0$ und vertausche Zeilen i und k. Gibt es kein solches i, finde Spalte $j > k$ mit $a_{ij}^{(k)} \neq 0$ für ein $i \geq k$ und vertausche Spalten k und j. Gilt jetzt $a_{kk}^{(k)} = 0$, vertausche auch noch Zeilen i und k.

Falls $a_{kk}^{(k)} = 0$: $k := k^* - 1$, gehe zu iv). Falls $a_{kk}^{(k)} \neq 0$: Führe für $j = 1, \dots, m$ aus

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)}, & b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)}, & &\text{falls } i \leq k, \\ a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - \tfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, & b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - \tfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}, & &\text{falls } k < i \leq n. \end{aligned}$$

iv) Für $k = k^*, \dots, 1, -1$ bestimme

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{k^*}} \left(b_k^{k^*} - \sum_{j=k+1}^{m} a_{kj}^{k^*} x_j \right)$$

.