Steuer- und Regelstrategien für Strömungen

Michael Hinze

Strömungen spielen in nahezu jeder alltäglichen Situation ein wichtige Rolle. Das fängt an beim Radfahren und geht über das Autofahren bis hin zum Fliegen. Bei allen genannten Aktivitäten spielt etwa der Energieaufwand eine wesentliche Rolle. Und damit auch die Frage nach dessen Optimierung. Genau um Fragestellungen dieser Art soll es sich in diesem Aufsatz drehen.

Nun ist schon die Beschreibung von Strömungen eine sehr komplexe Aufgabenstellung. Mehr noch deren numerische Simulation. Erst recht trifft das zu auf die komplexen Strömungen in den oben genannten Beispielen. Daher ist niemand Pessimist, der erwartet, daß Optimierung von Strömungen und die dazugehörige Simulation noch größeren Aufwand mit sich bringt. Das erklärt und rechtfertigt die Einfachheit der für die nachfolgenden Ausführungen gewählten Geometrie. Es handelt sich dabei um die rückwärtige Stufe in Abb. 1. Diese Geometrie kann als eine gro-

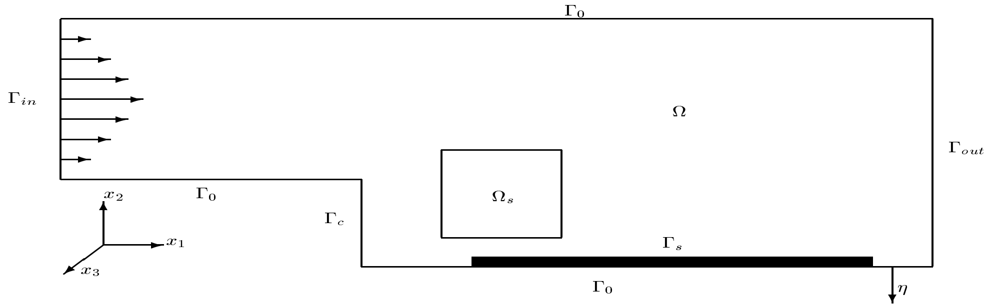

Abbildung 1: Rückwärtige Stufe mit Bezeichnungen

be Näherung an einen Zwei-Komponenten Tragflügel interpretiert werden und ist als Testbeispiel und Benchmark in zahlreichen numerischen Simulationen genutzt worden. Darüber hinaus liegen ausreichend Vergleiche vor zwischen numerischer Simulation und physikalischem Experiment. Es kann daher davon ausgegangen werden, daß die Strömung über eine Stufe, zumindest für sehr zähe Medien oder, was physikalisch ähnlich ist, für geringe Stufenhöhen, gut verstanden wird. Auf die Steuerung und Regelung zuletzt genannter, das heißt, laminarer Strömungen mit kleiner Reynoldszahl, werden wir uns hier beschränken und sprechen allgemein von Kontrollproblemen für solche Strömungen.

Kontrollprobleme für Strömungen lassen sich wie folgt beschreiben: Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ werde durchströmt von einem inkompressiblen Fluid mit kinematischer Viskosität ν. Ziel ist es, die Strömung auf der Grundlage von Beobachtungen (Messungen) im Beobachtungsvolumen Ω_s oder auf dem Beobachtungsrand Γ_s durch die Vorgabe von Volumenkräften in Ω oder Randbedingungen auf dem Kontrollrand Γ_c so zu beeinflussen, daß sie einem vorher festgelegten Zustand möglichst nahe kommt bzw. vorher festgelegte Eigenschaften möglichst gut erfüllt.

Dabei sind zwei Dinge zu gewährleisten. Zum einen muß die Strömung mittels eines geeigneten mathematischen Modells beschrieben werden. Das leisten die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen. Desweiteren müssen Zustände bzw. Eigenschaften der Strömung so mit Kosten behaftet werden, daß der angestrebte Zustand bzw. die gewünschten Eigenschaften kostenminimal oder zumindest von geringeren Kosten sind als die unkontrollierte Strömung. Da momentan noch keine praktisch implementierbaren Meßmethoden zur Erfassung eines dreidimensionalen Strömungsfeldes zur Verfügung stehen und es auch schwierig ist, Volumenkräfte in eine Strömung einzubringen, beschränken wir uns hier auf die Modellierung des aus praktischer Sicht relevanten Kontrollproblems mit Randkontrolle und Randbeobachtung.

Mathematisch wird dieser Sachverhalt formuliert durch ein restringiertes Minimierungsproblem mit den Navier-Stokes Gleichungen als Nebenbedingungen, welches im Falle von Randbeobachtungen der Strömung $u = (u_1, u_2, u_3)$ auf Γ_s und Randkontrollen $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ auf Γ_c in der

Form

$$
(P)\quad \left\{
\begin{array}{rcl}
\multicolumn{3}{l}{\min J(\Phi) = J(\Phi, u) = \frac{\gamma}{2}\int\limits_0^T \int_{\Gamma_c} \Phi^2 \, dSdt + \int\limits_0^T \int_{\Gamma_s} F(\partial_\eta u) \, dSdt} \\
\multicolumn{3}{l}{\text{unter den Nebenbedingungen}} \\
u_t - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &=& f \text{ in } \Omega \times (0,T] \\
-div\, u &=& 0 \text{ in } \Omega \times (0,T] \\
u &=& \left\{ \begin{array}{ll} \Phi & \text{auf } \Gamma_c \times (0,T] \\ 0 & \text{auf } \Gamma_d \times (0,T] \end{array} \right. \\
\frac{1}{\mathrm{Re}}\partial_\eta u &=& p\eta \text{ auf } \Gamma_{out}, \\
u(0) &=& u_0
\end{array}
\right. \qquad (1)
$$

geschrieben werden kann. Dabei wird auf dem Einströmrand Γ_{in} ein parabolisches Einströmprofil vorgegeben, auf dem Randstück Γ_0 Wandhaftung angenommen, d.h. die Strömungsgeschwindigkeit ist dort Null, und auf dem Ausströmrand Γ_{out} wird eine Ausströmbedingung vorgeschrieben, welche hier der natürlichen Randbedingung der Navier-Stokes Gleichungen entspricht. Auf dem Kontrollrand Γ_c wird die zu bestimmende Kontrolle in der Form von Einblasen und Absaugen in die Strömung eingebracht. Γ_d benennt den Randbereich, auf dem die Strömung in Form von Randwerten vorgeschrieben wird, d.h. $\Gamma_d = \partial\Omega \setminus \Gamma_{out}$. Ferner bezeichnet Re die Reynoldszahl, η die äußere Normale an den Rand $\partial\Omega$ von Ω, $(0,T]$ das betrachtete Zeitintervall und u_0 die Anfangsbedingung für die Strömung, d.h. die Strömung am Anfang des Simulationszeitraums.

Das Kostenfunktional J besteht aus zwei Teilen. Der erste Anteil, gewichtet mit der Konstanten γ, bewertet den Beitrag der Kontrolle Φ zu den Gesamtkosten. Je kleiner also die Werte von γ, desto billiger ist die Kontrolle. Der zweite Anteil modelliert mit Hilfe der Funktion $F(z_1, z_2, z_3)$ den eigentlich interessierenden Teil der Kosten. Dabei steht z_i für die Normalableitung $\partial_\eta u_i$ der i-ten Strömungskomponennte. Da die Strömung auf dem Beobachtungsrand vorgegeben ist, macht es dort nur Sinn, Normalenableitungen der Strömung, sogenannte Wandschubspannungen, zu messen.

Jetzt ist es an der Zeit, das eigentliche Ziel der Kontrolle zu formulieren und mit Hilfe einer geeigneten Funktion F zu modellieren. Dazu wird die Stufenströmung in Abb. 2 (a) betrachtet und das Ziel gesteckt, die Rezirkulation hinter der Stufe durch Einblasen/Absaugen am oberen Teil des Kontrollrandes Γ_c auf der Grundlage von Messungen am Stufenboden Γ_s zu reduzieren. Die grund-

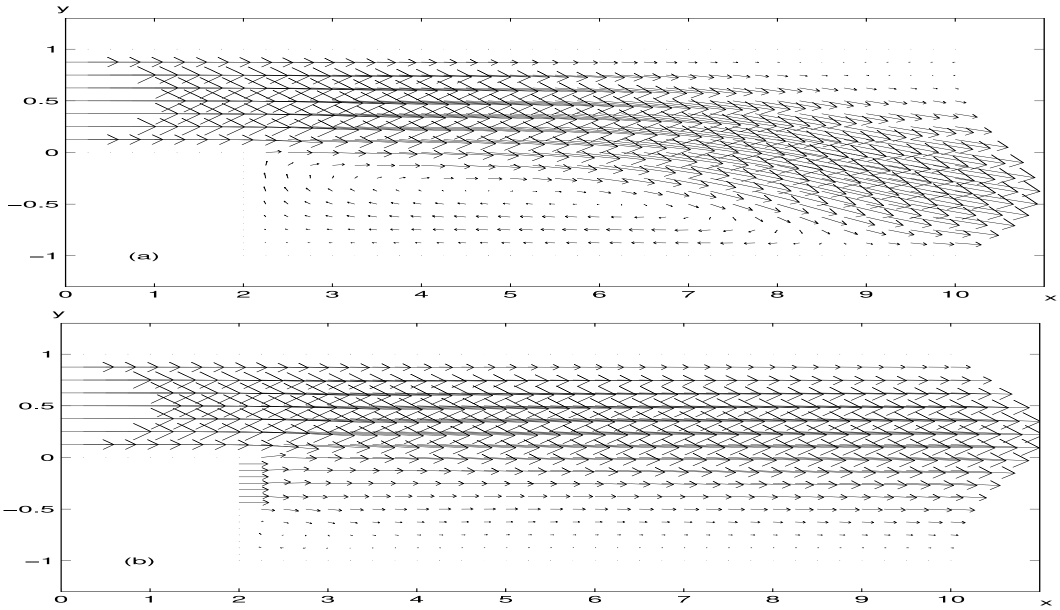

Abbildung 2: (a) Unkontrollierte Navier-Stokes Strömung, (b) Instantan geregelte Strömung

legende Beobachtung hierbei ist jetzt, daß Rezirkulation nur dann stattfinden kann, wenn das Fluid nahe des Stufenbodens in Richtung der Rückwand strömt, also entgegen der durch die Einströmung vorgegebenen Hauptströmungsrichtung. Formal heißt das für die Wandschubspannung

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \leq 0 \quad \text{auf dem Stufenboden im Rezirkulationsbereich.} \tag{2}$$

Es wird jetzt postuliert, daß Kosten nur durch wandnahe Rückströmung im Bereich des Beobachtungsrandes Γ_s entstehen können. Damit bietet sich

$$F\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) := \frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right|\right) \tag{3}$$

als Definition der Funktion F auf Γ_s an, denn mit dieser Wahl wird $F > 0$ im Falle wandnaher Rückströmung und $F = 0$ sonst. Kosten können also nur im Falle wandnaher Rückströmung auftreten. Die Modellierung unserer Aufgabenstellung ist damit abgeschlossen. Verbleibt noch die numerische Umsetzung.

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das Problem (P) bestehen aus einem System nichtlinearer zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen, welches sich aus den Navier-Stokes Gleichungen, einer weiteren linearen, in der Zeit rückwärtigen partiellen Differentialgleichung für die adjungierten Variablen und einer Optimalitätsbedingung für die Kontrolle zusammensetzt. Dieses System wird mittels eines gradientenähnlichen Verfahrens iterativ gelöst. Die dabei als Teilprobleme auftretenden zeitabhängigen partiellen Differentialgleichungen werden mit einer stabilen Finite-Element Methode im Ort und einer geeigneten Methode in der Zeit diskretisiert und danach numerisch gelöst.

Auf diese Weise wird eine optimale Steuerung zur Kontrolle der Strömung im Zeitraum $(0,T]$ erhalten, d.h., es wird für Γ_c ein Ein-/Ausblaseprofil $\Phi(t,x)$ berechnet, dessen Anwendung die Kosten $J(\Phi)$ in (P) (hoffentlich) minimiert.

Eine Steuerung ist natürlich nur dann brauchbar, wenn die Rahmenbedingungen für die Strömung immer dieselben sind. Denn die Kontrollfunktion Φ ist ja festgelegt, sofern sie einmal berechnet wurde und kann dementsprechend, etwa im Laufe eines Experiments, nicht mehr oder nur noch manuell angepaßt werden. Darüber hinaus ist die numerische Berechnung einer optimalen Steuerung mit der oben beschriebenen Methode sehr aufwendig. Das gilt sowohl für den Rechenzeitbedarf als auch für die Speicherplatzanforderungen. Eine weniger aufwendige Methode zur Berechnung optimaler Steuerungen ist darüber hinaus noch nicht bekannt.

Hier stellt sich die Frage, ob es nicht mit weniger Aufwand gelingen kann, brauchbare Kontrollen Φ für die Strömung bereitzustellen. Brauchbar meint hier, daß die Kontrollen auf sich ändernde Rahmenbedingungen in angemessener Zeit reagieren können und dabei zwar kostenreduzierend, nicht aber kostenminimal zu sein brauchen. In Formeln

$$\Phi = \Phi(u) \text{ auf } \Gamma_c \quad \text{und} \quad J(\Phi_{\text{opt}}) \leq J(\Phi) < J(0). \tag{4}$$

Die Kontrolle Φ hat hier insbesondere die Gestalt eines Regelgesetzes, welches auf der Basis eines Ausgangssignals u, hier Informationen aus der Wandschubspannung der Strömung am Beobachtungsrand, ein Eingangssignal $\Phi(u)$ berechnet. Jetzt werden zwei Möglichkeiten zur Konstruktion solcher Regelgesetze vorgestellt.

Bei der Verwendung von Instantaner Kontrolle werden zunächst die Navier-Stokes Gleichungen mittels eines geeigneten numerischen Integrationsverfahrens diskretisiert. Sodann wird in jedem Zeitschritt ein dem Ausgangsproblem (P) angepaßtes, jetzt stationäres Kontrollproblem approximativ mit dem Gradientenverfahren gelöst. Die so errechnete instantane Kontrolle wird angewendet und danach in der Zeit weiter integriert. An dieser Stelle sei bemerkt, daß dieses Verfahren auch komplett experimentell installiert werden kann. Ausführungen dazu sind in den Literaturangaben am Ende dieses Aufsatzes zu finden.

Ein anderer Zugang basiert auf einer geeigneten Systemreduktion. Das Strömungsfeld wird dabei mittels eines Galerkinansatzes approximiert, dessen Basisfunktionen aus numerisch simulierten Strömungen konstruiert werden. Bei der *Reduced Basis Method* werden dazu Simulationsdaten zu verschiedenen Parameterwerten (etwa verschieden großen Reynoldszahlen oder verschiedenen

Randwerten) geeignet linear kombiniert. Eine weitere Möglichkeit zur Konstruktion von Basisfunktionen für den Galerkinansatz bietet die *Snapshot-Form Proper Orthogonal Decomposition*, kurz POD. Bei dieser Methode werden paarweise orthogonale Basisfunktionen aus Schnappschüssen von Strömungen zu ausgewählten Zeitpunkten gebildet.

Ein Galerkinansatz unter Verwendung der so konstruierten Ansatzfunktionen überführt die Zustandsgleichungen des Kontrollproblems, hier die Navier-Stokes Gleichungen, in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen geringer Dimension. Die typische Größenordnung hierbei ist $3 <$ Dimension < 10. Darüber hinaus sind die Ansatzfunktionen schon divergenzfrei, so daß keine algebraischen Gleichungen zusätzlich zu den Differentialgleichungen auftreten. Mit Hilfe des reduzierten Systems können jetzt Regler der Form (4) schnell berechnet werden.

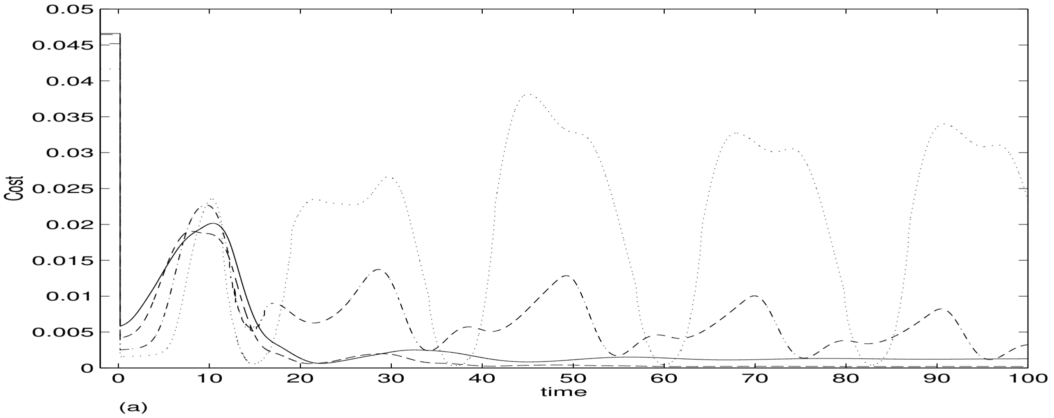

Abbildung 3: Kosten der Instantanen Regelung bei differierenden Längen des Beobachtungsrandes: $\Gamma_s = [2,9]$(solid), $[3,9]$(dashed), $[4,9]$(dash-dotted), $[5,9]$(dotted)

Numerische Resultate für die Instantane Methode sind in den Abbildungen 2 (b) und 3 zu sehen. Simuliert und kontrolliert wurde eine laminare zweidimensionale Strömung mit Reynoldszahl Re= 300. Abb.2 zeigt die zum Beobachtungsrand $\Gamma_s = [3,9]$ korrespondierende kontrollierte Strömung. Wie leicht zu erkennen ist, verschwindet die Rezirkulation über dem Beobachtungsrand komplett. Der Verlauf der Gesamtkosten $J(\Phi)$ über der Zeit ist für diese Strömung in Abb. 3 aufgetragen. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Kosten der unkontrollierten Strömung mit ihrem Wert von 0.047 deutlich über denen der kontrollierten Strömung liegen. Die anderen Kurven in dieser Abbildung zeigen die Kostenverläufe zu verschieden dimensionierten Beobachtungsrändern Γ_s. Es wird deutlich, daß mit wachsender Entfernung des Beobachtungsrandes von der Stufe die Verzögerung in der Antwortzeit des Reglers immer größer wird und sich schließlich wie erwartet ein periodisches Verhalten einstellt.

Zum Abschluß dieses Aufsatzes werden numerische Resultate zur Berechnung einer brauchbaren Steuerung für die Stufenströmung mit Hilfe der Systemreduktion diskutiert. Das Optimierungsziel ist wieder die Reduzierung von Rezirkulation hinter der Stufe durch Einblasen/Absaugen am oberen Teil des Kontrollrandes Γ_c, wobei diesmal jedoch Messungen der Strömung in einem Beobachtungsvolumen Ω_s zu Grunde gelegt werden. Rezirkulation soll dadurch vermieden werden, daß der Abstand der Stufenströmung in dem Beobachtungsvolumen Ω_s zu einer bekannten, rezirkulationsfreien Strömung im quadratischen Mittel minimal ausfällt. Als rezirkulationsfreie Strömung wird hier die Stokes-Strömung u_{Stokes} aus Abb. 4 verwendet. Zur mathematischen Modellierung dieser Situation wird das Kostenfunktional in dem Optimierungsproblem (1) leicht modifiziert zu

$$J(\Phi,u) = \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_c} \Phi^2 \, dSdt + \int_0^T \int_{\Omega_s} |u - u_{\text{Stokes}}| \, d\Omega_s dt,$$

wobei der zweite Term die Differenz zur Stokes-Strömung im quadratischen Mittel mißt. Als Pa-

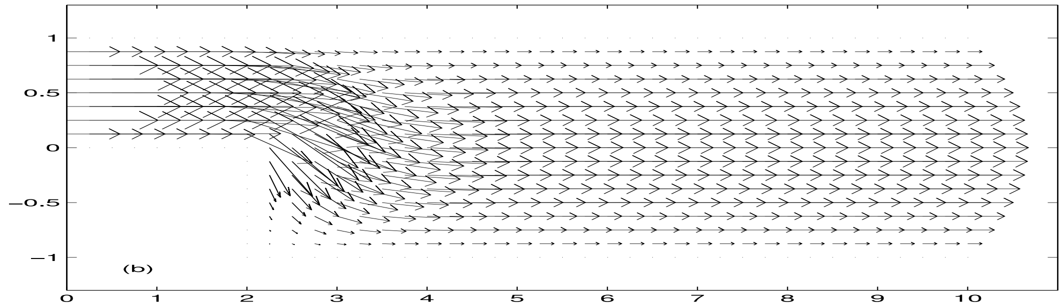

Abbildung 4: Stokes-Strömung u_{Stokes}, keine Rezirkulation

rameterwerte dienen in diesem Beispiel die Randbedingungen auf dem Einströmrand Γ_{in} und dem Kontrollrand Γ_c. Aus numerischen Simulationen zu verschiedenen Randwerten stehen sieben Strömungen $u_0, \dots, u_6$ zur Verfügung, deren Randwerte in der Tabelle Tab. 1 angegeben sind. Dabei bedeuteten positive Werte 'Einströmen', negative Werte 'Absaugen', wobei der Faktor die

	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Einströmrand	1	0	0	0	1	1	1
Kontrollrand	0	1	0.1	-0.1	1	0.1	-0.1

Tabelle 1: Randwerte der Simulationsdaten auf Γ_s (obere Zeile) und Γ_{in}

Intensität angibt. Auf dem Einströmrand ist das Profil immer parabolisch, auf dem Kontrollrand immer ein Blockprofil. Mit Hilfe dieser Simulationsdaten werden $M = 3$ Basisfunktionen

$$\varphi_1 = u_4 - u_0 - u_1,\ \varphi_2 = u_5 - u_0 - u_2 \text{ and } \varphi_3 = u_6 - u_0 - u_3$$

konstruiert, mit welchen für die Strömung der Ansatz

$$u = u_0 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + g_1 u_1 + g_2 u_2 + g_3 u_3$$

gewählt wird, wobei die Koeffizienten g_1, g_2, g_3 zur Kontrolle auf dem Kontrollrand Γ_c korrelieren. Anstelle des Problems (1) wird jetzt das reduzierte Problem

$$\text{(R)} \begin{cases} \min J(\vec{g}, u) = \frac{\gamma}{2}\int_0^T \|\vec{g}\|^2\, dt + \int_0^T \int_{\Omega_s} |u - u_{\text{Stokes}}|^2\, dxdt \\ \text{s.t.} \\ (u_t, \varphi_j) + \frac{1}{\text{Re}}(\nabla u, \nabla\varphi_j) + ((u\nabla)u, \varphi_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, M), \end{cases} \tag{5}$$

numerisch gelöst. Mit Hilfe der daraus erhaltenen optimalen Werte g_1^*, g_2^*, g_3^* wird eine brauchbare Steuerung g für das Ausgangsproblem (1) gemäß

$$g \ := \ (g_1^* u_1 + g_2^* u_2 + g_3^* u_3)_{|\Gamma_c} \tag{6}$$

erhalten.

In Abb. 5 sind sie numerischen Ergebnisse dargestellt für $\gamma = 0.1$ und $\Omega_s = [4, 6] \times [-1, 0]$. Die unkontrollierte Strömung ist in Abb. 2 (a) dargestellt. Die aus der Systemreduktion in diesem Fall erhaltene Steuerung reduziert die Kosten in der numerischen Simulation für das Ausgangsproblem um ca. 70 %. Dabei ist deutlich zu erkennen, daß die Randsteuerung (6) angewendet auf die Navier-Stokes Gleichungen aus (1) Rezirkulation im Beobachtungsbereich Ω_s nahezu komplett verhindert (Abb. 5, unten).

Eine detailierte Diskussion aller hier angerissener Verfahren mit ausführlich diskutierten numerischen Ergebnissen ist in den Arbeiten [1, 2, 3] zu finden. Dort finden sich auch weiterführende Literaturangaben, auf die aus Platzgründen hier nicht eingegangen wurde.

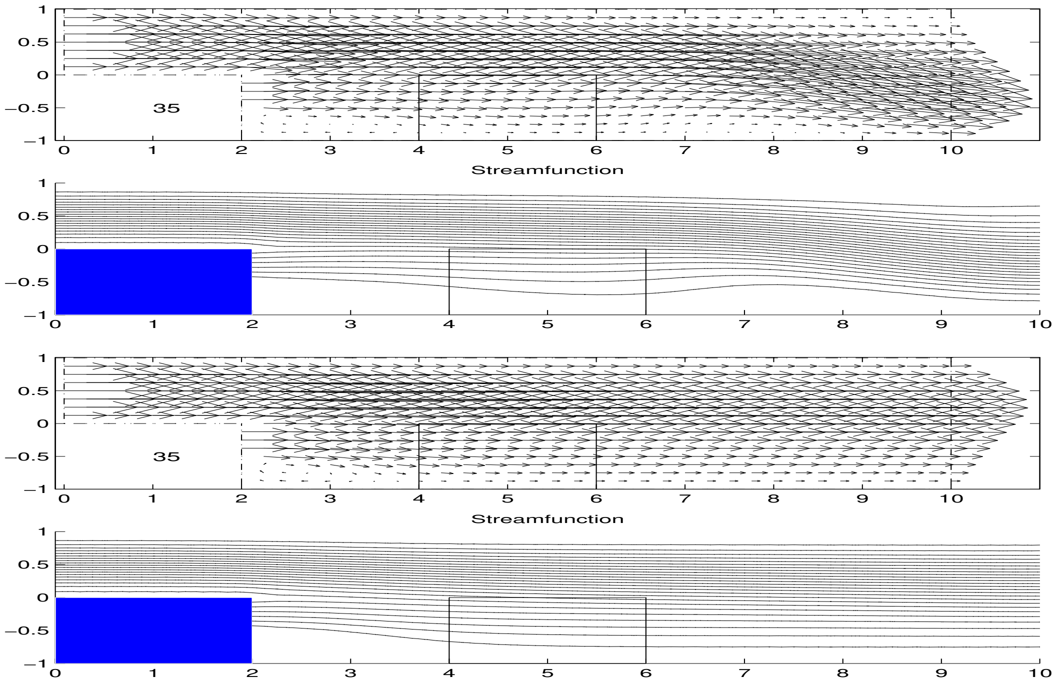

Abbildung 5: Von oben nach unten: Numerische Lösung von (5), Vektor- und Stromlinienplot; numerische Simulation mit den Randwerten aus (6), Vektor- und Stromlinienplot

Literatur

[1] **Choi, H.; Hinze, M. & Kunisch, K.** Instantaneous control of backward-facing-step flows. Preprint No. 571/1997, 1997. Technische Universität Berlin, Deutschland.

[2] **Hinze, M. & Kunisch, K.** On suboptimal Control Strategies for the Navier-Stokes Equations. Preprint No. 568/1997, 1997. Technische Universität Berlin, Deutschland (to appear in the Proceedings of the Luminy Conference on Control and Optimization, Luminy 1997).

[3] **Hinze, M. & Kunisch, K.** Control strategies for fluid flows - optimal versus suboptimal control. Preprint No. 573/1998, 1998. Technische Universität Berlin, Deutschland (to appear in the Proceedings of 2nd ENUMATH, Heidelberg 1997).