Institut für Numerische Mathematik SS 2004
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

Numerik partieller Differentialgleichungen

9. Übungsblatt: 23.6.2004

Aufgabe 9.1: Baryzentrische Koordinaten (4 Punkte)
Ein konvexes Polyeder $T \subset \mathbb{R}^n, n < m$ läßt sich durch die konvexe Hülle der Ecken p^j, $j = 1, \ldots, m$ darstellen,

$$\overline{T} = \left\{ x : x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p^j,\ \lambda_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Die Zahlen $\lambda_j,\ j = 1, \ldots, m$ heißen baryzentrische Koordinaten. Seien im folgenden $m = 4$, $n = 3$, und $\mathring{T} \neq \emptyset$

a) Zeigen Sie, dass durch die Beziehungen $x = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j p^j$ und $\sum_{j=1}^{4} \lambda_j = 1$ jedem $x \in \mathbb{R}^3$ eindeutig die Zahlen $\lambda_j = \lambda_j(x; S)$ zugeordnet sind.

b) Sei $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine bijektive, affine Abbildung. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lambda_j(x; S) = \lambda_j(l(x); l(S)).$$

c) Es bezeichne $\tilde{S}$ den Einheitssimplex

$$\tilde{S} := \left\{ z \in \mathbb{R}^3 :\ z_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3 \text{ und } z_1 + z_2 + z_3 \leq 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}, b \in \mathbb{R}^3$ derart, daß $S = B\tilde{S} + b$. Wie lauten die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes z im Einheitssimplex $\tilde{S}$?

Aufgabe 9.2*: (4 Zusatzpunkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ polygonal berandetes Gebiet, $\mathcal{T}$ eine zulässige Triangulierung von $\overline{\Omega}$ und $b_1, \ldots, b_{nf}$ die zugehörigen Basisfunktionen. Ferner bezeichnen h die Gitterweite und α den kleinsten Winkel aller Dreiecke von T, k die größte ganze Zahl mit $P_k(\overline{\Omega}) \subset V_h = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_{nf}\}$. Dann gilt mit einer von u und T unabhängigen Konstanten $C > 0$ für alle $u \in H^{k+1}(\Omega), s = 0, 1$

$$|u - I_h u|_{s,\Omega} \leq C\,(\sin\alpha)^{-s}\, h^{k+1-s}\, |u|_{k+1,\Omega}\,.$$

Tipp: Beweise der Sätze 6.22-6.24 der Vorlesung.

Aufgabe 9.3: (4 Punkte)
Beweisen Sie Satz 6.25', die Verallgemeinerung von Satz 6.25 für die Variationsaufgabe

$$\int_\Omega A(x)\nabla u \nabla v + a(x)uvdx = f(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1}$$

Dabei ist $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}, n = 2,3$ gleichmäßig positiv definit $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $a(x) \in L^\infty(\Omega)$, $a(x) \geq 0$ und k bezeichnet den Grad der Polynome des Ansatzraumes auf den Teilgebieten.
Satz 6.25': Unter den Voraussetzungen des Satzes 6.25 gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}\,.$$

Aufgabe 9.4*: (4 Zusatzpunkte)
Zeigen Sie für das Variationsproblem aus Aufgabe 9.3

i) (1) besitzt genau eine Lösung u.

ii) Die FE Diskretisierung von (1) (siehe Vorlesung) besitzt genau eine Lösung u_h

Aufgabe 9.5: Baryzentrische Koordinaten II (4 Punkte)
In einem Simplex T bezeichnen $p^\alpha \in T$ zu Multiindizes $\alpha \in \mathbb{R}^3$ gehörige Punkte mit den baryzentrischen Koordinaten $\lambda := \frac{\alpha}{|\alpha|}$. Sei $\mathcal{P}_i$ der Raum der Polynome über T vom Grad höchstens i. Ferner seien ein Funktional $\Phi : \mathcal{P}_3(T) \to \mathbb{R}$ und ein Unterraum $\tilde{\mathcal{P}}_3 \subset \mathcal{P}_3$ durch $\tilde{\mathcal{P}}_3 = \{v \in \mathcal{P}_3 : \Phi(v) = 0\}$ definiert, wobei

$$\Phi(v) = 3\sum_{|\alpha|=3} v(p^\alpha) - 15v(p^{111}) - 5(v(p^{300}) + v(p^{030}) + v(p^{003})), \ \ \forall\, v \in \mathcal{P}_3.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}_2 \subset \tilde{\mathcal{P}}_3$.
Erläuterung: Elemente, bei denen innere Punkte eliminiert werden heißen Serendipity-Elemente. Dadurch verringert sich die Anzahl der Variablen. Um eine hinreichen gute Konvergenzordnung zu erhalten, sollte der nächst niedrigere Polynomraum im durch die Serendipity-Elemente aufgespannten Raum liegen.

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 23.6.2004 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen. Die Zusatzpunkte können auf diesem oder jedem anderen Aufgabenblatt gegen andere theoretische Aufgaben verrechnet werden.