Institut für Numerische Mathematik SS 2004
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

Numerik partieller Differentialgleichungen

8. Übungsblatt: 16.6.2004

Aufgabe 8.1: (4 Punkte)
Verallgemeinern Sie den Satz 6.17 auf den n-dimensionalen Fall, d.h. auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Welche Abschätzungen erhalten Sie für $\kappa(M)$ und $\kappa(A)$?

Aufgabe 8.2: (4 Punkte) Beweisen Sie die Folgerung 6.20:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, $k \geq 1$. Für $f \in H^k(\Omega)$ gelte $\int_\Omega D^\alpha f(x)dx = 0 \quad \forall\, |\alpha| \leq k-1$. Dann existiert eine Konstante $C = C(\Omega, n, k)$, so dass

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} \leq C\, |f|_{H^k(\Omega)}\,.$$

Aufgabe 8.3*: (4 Zusatzpunkte)
Sei T nichtdegenerierter n-Simplex mit Ecken $\{a_0, \ldots, a_n\}$ und $I : C^0(\overline{T}) \to C^0(\overline{T}) : u \mapsto Iu$ der Interpolationsoperator mit $(Iu)(a_i) = u(a_i)$ $(i = 0, \ldots, n)$ und $Iu \in P_1(T)$. Beweisen sie, dass $\|I\|_{C^0 \to C^0} = 1$, d.m. für jede auf $\overline{T}$ gleichmäßig stetige Funktion u gilt $\|Iu\|_\infty \leq \|u\|_\infty$.

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 26.5.2004 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen.

Numerische Aufgabe 4: (3 num. Punkte)
Gegeben seien die Gebiete $\Omega_1 := (0,1)^2$ und $\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^2, x_1 = r\cos\phi, x_2 = r\sin\phi,\ r \in (0,1),\ \phi \in (0,\omega)\}$ mit $\omega = \frac{3}{2}\pi$.
Der Rand von Ω_1 werde mit Γ bezeichnet, die geraden Ränder von Ω seien Γ_1 und der gekrümmte Rand von Ω_2 werde mit Γ_2 bezeichnet. Verwenden Sie zur numerische Diskretisierung der Poisson-Probleme

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega_1, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega_2, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_1, \\ u &= \sin(\frac{\pi}{\omega}\phi) \text{ auf } \Gamma_2 \end{aligned} \tag{2}$$

mit den rechten Seiten

$$f_1 = \sin(\pi x_1)\,\sin(\pi x_2) \quad \text{bzw.} \quad f_2 = 0$$

die Methode der finiten Elemente mit linearen Ansatzfunktionen. Zur Triangulierung der Gebiete verwenden Sie z.B. Ihr Programm aus der numerischen Aufgabe 3.

i) Schreiben Sie ein Programm, welches die Masse- und Steifigkeitsmatrix kompiliert, vergl. Code 6.14.

ii) Lösen sie das resultierende Gleichungssystem mit einem Algorithmus Ihrer Wahl (z.B CG-Verfahren).

iii) Stellen Sie die Lösungen graphisch dar.

iv) Ermitteln Sie für die angegebenen Aufgaben jeweils die experimentelle Konvergenzordnung für die Fehlerfunktionale

$$\begin{aligned} E_\infty(h) &:= \max_{1\le i\le nf} |u(P_i) - u_i| \ , \\ E_0(h) &:= \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \ , \\ E_1(h) &:= \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \ \cdot, \end{aligned}$$

wobei u^h die numerische Lösung zur Gitterweite h und u die exakten Lösung $u = \frac{1}{2\pi^2}\sin \pi x_1 \, \sin \pi x_2$ von (1) bzw. $u = r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\frac{\pi}{\omega}\phi)$ von (2) bezeichnet. Dabei ist für zwei Gitterweiten $h_1 \neq h_2$ die Experimentelle Konverenzordnung (EOC) eines Fehlerfunktionals $E(h)$ definiert durch

$$\text{EOC} = \frac{\ln E(h_1) - \ln E(h_2)}{\ln h_1 - \ln h_2}.$$

Welche Konvergenzordnungen werden erreicht?

Die numerische Aufgabe 4 ist in der 26. Woche (21.6.-25.6.2004) vorzugsweise in Raum C 315 vorzuführen. Genauere Termine können wir in der Übung am 16.6. ausmachen. Es soll in Gruppen von möglichst 2, maximal 3 Studierenden gearbeitet werden.