Institut für Numerische Mathematik SS 2004
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

Numerik partieller Differentialgleichungen

7. Übungsblatt: 9.6.2004

Aufgabe 7.1: (4 Punkte)
Sei $F_T : \hat{T} \to T$ die Referenzabbildung zwischen dem Einheitsdreieck $\hat{T}$ und dem Dreieck T,

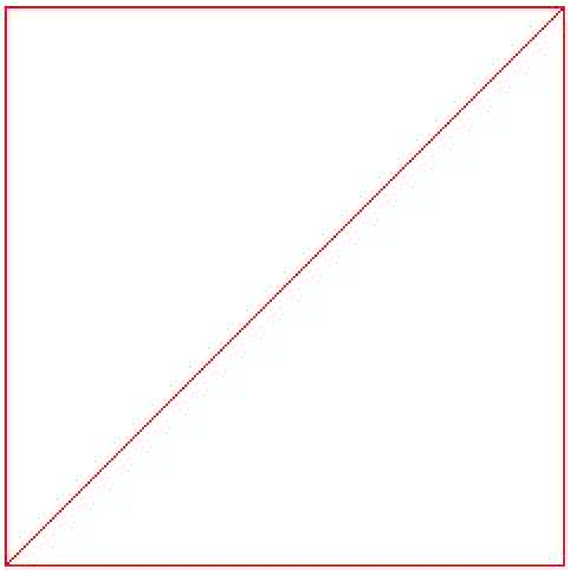
$$F_T(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} x_1^1 - x_1^0 \\ x_2^1 - x_2^0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} x_1^2 - x_1^0 \\ x_2^2 - x_2^0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) $J := |\det DF_T| = 2\,|T|$,

b) $\begin{pmatrix} \partial x_1 \\ \partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{x_1} & \eta_{x_1} \\ \xi_{x_2} & \eta_{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \xi \\ \partial \eta \end{pmatrix}$ für den von F_T induzierten Koordinatenwechsel. Geben Sie ξ_{x_i}, η_{x_i} , $i = 1, 2$ an.

Aufgabe 7.2: (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)
Sei das Einheitsquadrat wie folgt makrotrianguliert:



Es bezeichne Z_{h_k} die aus k-facher konformer, kongruenter Unterteilung resultierende Triangulierung. Numerieren Sie die Knoten zeilenweise.

a) Berechnen Sie die Steifigkeitsmatrix A_{h_k} und die Massematrix M_{h_k} für lineare finite Elemente. Was fällt Ihnen auf?

b)* Geben Sie die Kondition von A_{h_k} an.

Aufgabe 7.3: (4 Punkte)
Friedrichsche Ungleichung für Funktionen mit Mittelwert Null.
Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega |u|^2 \, dx \leq c \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \qquad \forall\, u \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega u dx = 0$$

mit einem $c > 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 7.4: (4 Punkte)
Betrachten Sie

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \text{ in } \Omega_\alpha := \{(r\cos\phi, r\sin\phi); 0 < r < 1, 0 < \phi < \alpha\pi\}, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega_\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

mit $g(r,\phi) = r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\phi}{\alpha} - \frac{r^2}{4}$. Zeigen Sie:

i) g ist Lösung des Randwerproblems (1).

ii) Geben Sie ∇ und Δ in Polarkoordinaten an.

iii) Für $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$ gilt

$$u \in H^{1,p}(\Omega_\alpha) \quad \forall\, 1 \leq p < \frac{2}{1-\beta},$$

iv) für $2 > p \geq 1$ gilt

$$u \in H^{2,p}(\Omega_\alpha) \quad \forall\, 1 \leq p < \frac{2}{2-\beta}.$$

Aufgabe 7.5*: (4 Zusatzpunkte)
Geben Sie einen Algorithmus an, welcher eine Matrix-Vektor-Multiplikation für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit Hilfe von 2 Vektoren der Länge der Anzahl der Nicht-Null-Elemente von A und einem $(n+1)$-Vektor realisiert.

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 9.6.2004 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen. Die Zusatzpunkte können auf diesem oder jedem anderen Aufgabenblatt gegen andere theoretische Aufgaben verrechnet werden.