Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

SS 2004

Numerik partieller Differentialgleichungen

6. Übungsblatt: 26.5.2004

Aufgabe 6.1: (4 (2+2) Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, f, g, h, p gegebene Funktionen und $c \geq 0$. Betrachtet wird das Problem mit gemischten Randbedingungen.

$$\begin{aligned} -\Delta u + cu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + pu &= h \quad \text{auf } \Gamma_2, \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei sei $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

a) Leiten Sie die Variationsformulierung des Problems (1) her.

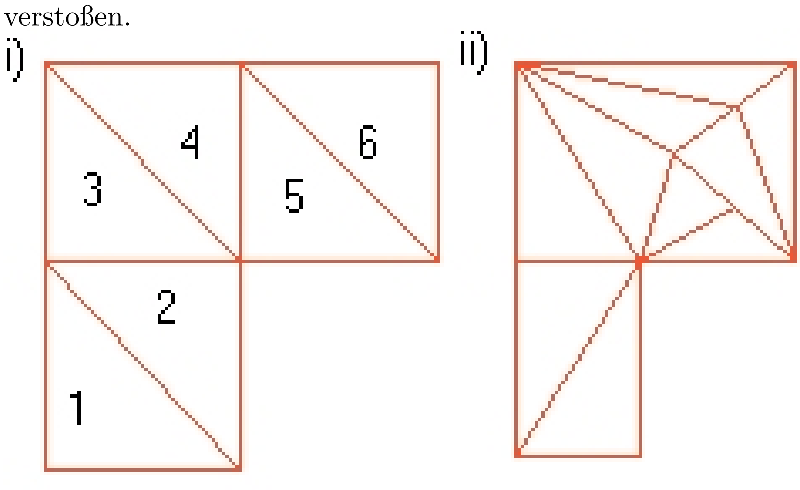
b) Geben Sie das zu Aufgabenteil a) korrespondierende Minimierungsproblem an und zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\frac{d}{d\epsilon} J(u^* + \epsilon v) = 0 \quad \forall\, v \in V$$

an die Richtungsableitung Ihres Funktionals J wieder auf die Variationsformulierung führt.

Aufgabe 6.2: Triangulierungen (4 Punkte)

a) Welche der beiden folgenden Triangulierungen sind zulässig (gemäß Definition 6.3)? Benennen Sie ggf. die Dreiecke und Punkte, die gegen die Bedingungen i) - iv) verstoßen.



b) Verfeinern Sie das linke Gebiet einmal durch kongruente Verfeinerung und einmal durch Bisektion nach der längsten Kante eines Dreiecks der Makrotriangulierung. Machen Sie bei Ihrer Verfeinerung deutlich, wo hängende Knoten entstehen und wie diese beseitigt werden. Geben Sie die Kanten an, nach denen im nächsten Bisektionsschritt verfeinert werden würde.

c) Geben Sie die Belegung von *node* und *edge* von Dreieck 2 und Dreieck 6 an. Die lokale Numerierung sei dabei vom größten Winkel aus gesehen entgegen dem Uhrzeigersinn. Die Ränder des Gebietes seien Dirichletränder.

Aufgabe 6.3: 2D lineare Finite Elemente (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, polygonal berandetes Gebiet und sei $\tau = \{T_1, \dots, T_{N_T}\}$ eine zulässige Triangulierung von Ω mit Knoten $K = \{P_1, \dots, P_{N_P}\}$. Des weiteren bezeichnen ϕ_i, $1 \le i \le N_P$ die 2D linearen Finiten Elementfunktionen. Für diese gilt in den Knoten: $\phi_i(P_j) = \delta_{ij}\ \forall i, j = 1, \dots, N_p$. Auf den Dreiecken sind sie affin-lineare Funktionen.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\phi_i : 1 \le i \le N_P\}$ linear unabhängig in $C^0(\overline{\Omega})$ ist.

b) Leiten Sie durch die Wahl eines geeigneten Ansatzraumes aus der schwachen Formulierung von (1) aus Aufgabe 6.1 ein Gleichungssystem her. Die auftretenden Integrale sollen dabei nicht berechnet werden.

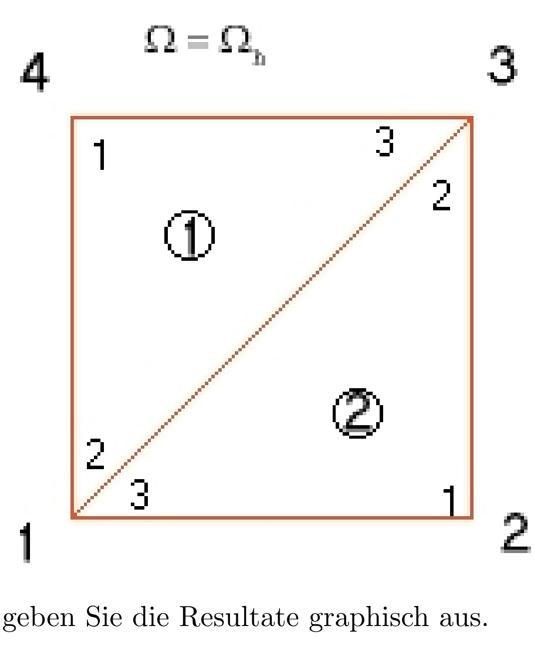
Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 26.5.2004 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen.

Numerische Aufgabe 3: (3 num. Punkte) Schreiben Sie ein Programm, welches ausgehend von einer Makrotriangulierung des Gebietes Ω eine Triangulierung des selben mit Gitterweite $\le h$ berechnet. Verwenden Sie dabei

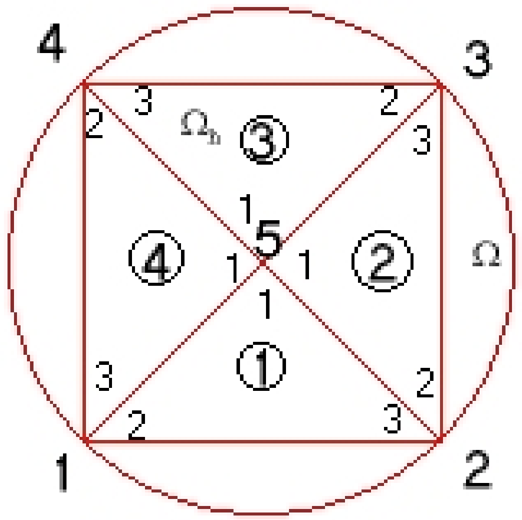
i) kongruentes Unterteilen

ii) Bisektion

Testen Sie ihr Programm an den Beispielen



a)



b)

und geben Sie die Resultate graphisch aus.

Die numerische Aufgabe 3 ist in der 24. Woche (7.6.-11.6.2004) vorzugsweise in Raum C 315 vorzuführen. Genauere Termine können wir in der Übung am 26.5. ausmachen. Es soll in Gruppen von möglichst 2, maximal 3 Studierenden gearbeitet werden.