Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

SS 2004

Numerik partieller Differentialgleichungen

5. Übungsblatt: 19.5.2004

Aufgabe 5.1: (4 Punkte)
Weisen sie nach, dass in der Argumentation des Beweises von Satz 5.15 immer der Rand Γ_h erreicht wird.

Aufgabe 5.2: (4 Punkte)
Betrachten Sie die Aufgabe

$$\begin{aligned} L\,u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

wobei L etwa einen elliptischen Differentialoperator bezeichnet und f, g hinreichend glatte Funktionen darstellen. Sei $\overline{\Omega}_h \subset \overline{\Omega}$ Gitter wie in Hauptsatz 5.19. g_h bezeichne eine Approximation von g mit

$$\max_{p \in \Gamma_h} |g_h(p) - g(p)| = O(1) \;\; (O(h^k)) \quad (h \to 0).$$

Dann gilt unter den Voraussetzungen von Hauptsatz 5.19 für die Lösung u_h von

$$\begin{aligned} L_h\,u_h &= f_h \quad \text{in } \Omega_h \\ u_h &= g_h \quad \text{auf } \Gamma_H, \end{aligned}$$

(mit $\overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$) die Abschätzung

$$\max_{p \in \overline{\Omega}_h} |u(p) - u_h(p)| = O(1) \;\; (O(h^k)) \quad (h \to 0).$$

Aufgabe 5.3: (4 Punkte)
Beweisen Sie Satz 5.12 der Vorlesung.

Aufgabe 5.4: (4 Punkte) Betrachten Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } (0,1)^2 \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma = (\partial(0,1)^2). \end{aligned}$$

Die Diskretisierung erfolgt auf einem quadratischen Netz mit der Maschenweite $h = \frac{1}{N+1}$ nach dem Schema

$$\frac{1}{12h^2}\begin{bmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -8 & 40 & -8 \\ -2 & -8 & -2 \end{bmatrix} u_h = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 8 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} f.$$

a) Beweisen Sie:

$$(f_1 \leq f_2) \text{ und } (u_{h,1}\,|_\Gamma \leq u_{h,2}\,|_\Gamma) \implies u_{h,1} \leq u_{h,2}.$$

b) Zeigen Sie die L_∞-Stabilität des Schemas, d.h.

$$\|u_h\|_\infty \leq C\,\|f\|_\infty\,,$$

und geben Sie einen möglichst guten Werte für die Konstante C an.

c) Lösen Sie das diskrete Problem für $N = 1, 3, 5$ mit

α) $\sin \pi x \, \sin \pi y$

β) $2(x + y - x^2 - y^2)$

Hinweis: Es können die zu erwartenden Symmetrieeigenschaften der Lösung ausgenutzt werden.

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 19.5.2004 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen.