Institut für Numerische Mathematik SS 2004
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

Numerik partieller Differentialgleichungen

4. Übungsblatt: 12.5.2004

Aufgabe 4.1: Maximumprinzip (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)
Es bezeichne

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_j}\partial_{x_i}u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i}u(x) + c(x)$$

mit positiv semidefiniter Matrix $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j=1}^n$, d.h. es gelte $\xi^T A(x)\,\xi \geq 0\ \forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n$. Ferner gebe es ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi^T A(x)\,\xi > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$. Zeigen Sie:

a) Es sei $c(x) = 0\ \forall\, x \in \Omega$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
Lu = f \leq 0 \text{ in } \Omega \quad &\Rightarrow \quad \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\Gamma} u(x)\,,\\
Lu = f \geq 0 \text{ in } \Omega \quad &\Rightarrow \quad \min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\Gamma} u(x) \ \text{ und}\\
Lu = f = 0 \text{ in } \Omega \quad &\Rightarrow \quad \text{Max und Min von } u \text{ werden auf } \Gamma \text{ angenommen.}
\end{aligned}$$

Tipp: $u_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon\, e^{\gamma\,\xi^T x}$ als Vergleichsfunktion.

b) c(x)=0 ist notwendig für Aussagen in a)
Tipp: Konstruktion eines Gegenbeispiels.

c)* Was kann im Fall $c(x) \geq 0\ \forall\, x \in \Omega$ ausgesagt werden?

Aufgabe 4.2:(Konsistenz von Differenzensternen) (4 Punkte)
Sei $\Omega = (0,1)^2$, $\overline{\Omega}_h$ äquidistantes Gitter über $\overline{\Omega}$ mit Gitterweite $h = \frac{1}{N+1}$, d.h. $\overline{\Omega}_h = \{(ih, jh) : i,j = 0,\dots,N+1\}$. Ein Schema der Form

$$D_{pq} := \begin{bmatrix} c_{-p,q} & \cdots & c_{p,q} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{-p,-q} & \cdots & c_{p,-q} \end{bmatrix}$$

heißt Differenzenstern und wirkt für $x \in \overline{\Omega}_h$ auf $u(x)$ in der Form

$$D_{pq}u(x) := \sum_{i=-p}^{p} \sum_{j=-q}^{q} c_{i,j}u(x+ih, y+jh).$$

Mit Differenzensternen werden u.a. diskrete Differentialoperatoren beschrieben.

Zeigen Sie:

i)

$$-h^2\Delta u = \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix} u + O(h^4), \quad \text{falls } u \in C^4(\overline{\Omega}).$$

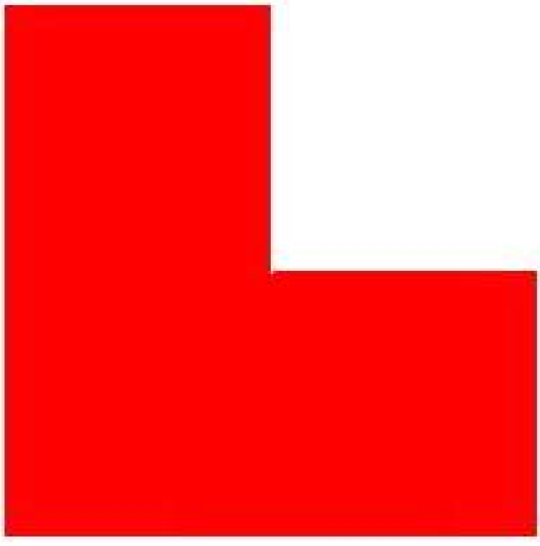
ii)

$$12h^2(-\Delta u + f) = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -8 & 40 & -8 \\ -2 & -8 & -2 \end{bmatrix} u + h^2 \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 8 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} f + O(h^6), \quad \text{falls } u \in C^4(\overline{\Omega}).$$

iii) Für Polynome welchen Grades sind die angegebenen Differenzensterne exakt?

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 12.5.2004 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen.

Numerische Aufgabe 2: (3 num. Punkte) Gegeben sei das L-Gebiet $\Omega := (0,1)^2 \backslash [\frac{1}{2}, 1]^2$(siehe Bild).



Verwenden Sie zur numerische Diskretisierung des Poisson-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega = \Gamma \end{aligned}$$

mit rechten Seiten

$$f_1 = \sin(\pi x_1)\,\sin(\pi x_2) \quad \text{und} \quad f_2 = 2(x + y - x^2 - y^2)$$

sowohl

$$-\Delta u \approx h^{-2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix} u\,,$$

als auch

$$-\Delta u \approx \frac{1}{12} h^{-2} \begin{bmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -8 & 40 & -8 \\ -2 & -8 & -2 \end{bmatrix} u$$

für $-\Delta$, sowie

$$f \approx \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} f$$

und

$$f \approx \frac{1}{12} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 8 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} f$$

für die rechte Seite f. Verwenden Sie dabei als Gitterweite $h = 2^{-k}$ mit $k = 1, 2, \ldots, 8$.

i) Berechnen Sie die numerischen Lösungen mit einer numerischen Methode Ihrer Wahl und stellen Sie diese graphisch dar.

ii) Ermitteln Sie für die angegebenen Diskretisierungen jeweils die experimentelle Konvergenzordnung für das Fehlerfunktional

$$E(h) := \max_{i,j \ 1 \le i,j \le N} \left| u^{h_*}_{i,j} - u^{h}_{i,j} \right| \,,$$

wobei u^h die numerische Lösung zu Gitterweite h und u^{h_*} eine Approximation der exakten Lösung zu $h_* = 2^{-10}$ bezeichnet. Dabei ist für zwei Gitterweiten $h_1 \neq h_2$ die Experimentelle Konverenzordnung (EOC) eines Fehlerfunktionals $E(h)$ definiert durch

$$\text{EOC} \ = \frac{\ln E(h_1) - \ln E(h_2)}{\ln h_1 - \ln h_2}.$$

Welche Konvergenzordnungen werden in dem Beispiel bei den verschiedenen Differenzensternen erreicht?

Die numerische Aufgabe 2 ist in der 21. Woche (17.5.-21.5.2004) vorzugsweise in Raum C 315 vorzuführen. Genauere Termine können wir in der Übung am 13.5. ausmachen. Es soll in Gruppen von möglichst 2, maximal 3 Studierenden gearbeitet werden.