Institut für Numerische Mathematik SS 2004
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

Numerik partieller Differentialgleichungen

3. Übungsblatt: 5.5.2004

Aufgabe 3.1:(Abstraktes Variationsproblem) (4 Punkte)
Sei U Hilbert Raum und $U_h \subset U$ endlichdimensionaler Teilraum. Zu $f \in U^*$ betrachte

$$a(u,v) = f(v) \quad \forall\, v \in U,$$

wobei $a : U \times U \to \mathbb{R}$ stetige, koerzitive Bilinearform sei, d.h.

$$|a(u,v)| \leq c_s \|u\| \|v\|, \quad a(v,v) \geq c_k \|v\|^2 \quad \forall\, u,v \in U$$

mit positiven Konstanten c_s, c_k. Setze

$$a_h := a_{|U_h \times U_h}, \quad f_h := f_{|U_h}.$$

Zeigen Sie:

i) Das Problem
„ Finde $u_h \in U_h$ mit $a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in U_h$ " besitzt genau eine Lösung $u_h \in U_h$.

ii) Charakterisieren Sie die Lösung u_h aus i) mittels eines linearen Gleichungssystems der Form $A\alpha = b$ mit A, b geeignet.

iii) Zeigen Sie, daß die Matrix A aus ii) positiv definit ist.

iv) Zeigen Sie das Lemma von Céa:

$$\|u - u_h\| \leq c \inf_{v_h \in U_h} \|u - v_h\|.$$

Wie hängt die Konstante c von c_s, c_k ab?

Aufgabe 3.2: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offenes, beschränktes Gebiet. Zeigen Sie

i) $\|f\|_{1,p,\Omega} \leq c \|\nabla f\|_{0,p,\Omega} \quad \forall\, f \in H_0^{1,p}(\Omega)$ mit einer positiven Konstanten c.

ii) $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$ und $|\cdot|_{1,p,\Omega}$ sind auf $H_0^{1,p}(\Omega)$ äquivalente Normen, wobei $|f|_{1,p,\Omega} := \|\nabla f\|_{0,p,\Omega}$.

Aufgabe 3.3: (4 Punkte)
Sei $\Omega = \bigcup_{j=1}^{nt} T_j$, wobei $T_j \quad (j = 1, \ldots, nt)$ Dreiecke mit der Eigenschaft
$T_i \cap T_j = \emptyset$ oder Ecke oder Kante $(i \neq j)$ bezeichen.
Zeigen Sie, daß jede Funktion $f \in C^m(\overline{\Omega})$, mit der Eigenschaft
$f_{|T_j} \in \mathcal{P}_k$ (für ein $k \geq m+1$) für $j = 1, \ldots, nt$
in $H^{m-1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ enthalten ist.

Aufgabe 3.4: (4 Punkte (2+2)) (Maximumprinzip)

a) Sei

$$Lu := -u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

mit $c(x) \geq 0$. Zeigen Sie:

i) Für die Lösung u gilt: $f(x) \leq 0 \, \forall x \in [0,1]$ impliziert $u \leq 0$

ii) Aus $Lv \leq Lw$, $v(0) \leq w(0)$, $v(1) \leq w(1)$ folgt $v(x) \leq w(x) \, \forall x \in [0,1]$

b) Beweisen Sie das folgende diskrete Randmaximumprinzip:
$\Omega = (P_1, P_2, \ldots, P_N)$ sei eine endliche Menge in einem Intervall $(0,1) \subset \mathbb{R}^1$. Für die (N,N)-Matrix A und die auf $\Omega \cup \{0,1\}$ definierte reellwertige Gitterfunktion y gelte

(1) $Ae \geq 0$ für $e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$,

(2) $\max(y(0), y(1)) \geq 0$,

(3) Für alle $v \in \mathbb{R}^N$ impliziert $Av \geq 0$ die Relation $v \geq 0$.

Dann gilt:

$$AY \leq 0 \text{ für } Y = \begin{bmatrix} y(P_1) \\ \vdots \\ y(P_N) \end{bmatrix} \text{ impliziert } \max_{P \in \Omega} y(P) \leq \max(y(0), y(1)).$$

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist Donnerstag, der 6.5.2004 in WIL C 313. Die Aufgaben werden dann in der darauffolgenden Übung besprochen.