Institut für Numerische Mathematik SS 2004
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

Numerik partieller Differentialgleichungen

2. Übungsblatt: 28.4.2004

Aufgabe 2.1: (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von

$$-\epsilon u'' - u' = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \tag{1}$$

b) Wenden sie das gewöhnliche Differenzenverfahren mit zentralen Differenzen auf (1) an. Verwenden Sie dabei ein äquidistantes Gitter mit $u_0 = 0, u_{N+1} = 1$. Zeigen Sie, dass dieses Verfahren die Lösung

$$u_i = \frac{1 - r^i}{1 - r^{N+1}} \quad \text{mit} \quad r = \frac{2\epsilon - h}{2\epsilon + h}$$

liefert ($h = \frac{1}{N+1}$).

c) Zeigen Sie, dass bei kleinen ϵ selbst für $h = \epsilon$

$$\lim_{h\to 0} u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} u(x_1) = 1 - \frac{1}{e}$$

gilt. Die Grenzwerte sind offenbar verschieden.

Aufgabe 2.2: (4 Punkte)
Sei $u_0(x)$ die Lösung von

$$b(x)u' + c(x)u = f(x), \;\; u(0) = 0,$$

$u(x, \epsilon)$ löse

$$-\epsilon u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \;\; u(0) = u(1) = 0.$$

Beweisen Sie:
Ist $b(x) \geq b_0 > 0$, dann gilt für alle $x \in [0, x_0)$ mit $x_0 < 1$

$$\lim_{\epsilon\to 0} u(x, \epsilon) = u_0(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $|u - u_0| \leq M^*\epsilon$ für $x \in [0, x_0)$ mit $x_0 < 1$ gilt.

Aufgabe 2.3*: (4 Zusatzpunkte (ZP))
Gegeben sei die singulär gestörte Randwertaufgabe

$$-\epsilon u''(x) + bu'(x) + cu(x) = f(x) \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

wobei $0 < \epsilon \ll 1, b > 0, c \geq 0$. Zur Diskretisierung mit Finiten Differenzen werde u'' wie üblich diskretisiert, für die Diskretisierung von u' verwenden Sie

i) zentrale Differenzenquotienten,

ii) vorwärts Differenzenquotienten,

iii) rückwärts Differenzenquotienten.

Untersuchen Sie die Stabilität und Konsistenz und diskutieren Sie die Abhängigkeit der Konstanten vom Parameter ϵ (insbesondere $\epsilon \to 0$).

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 28.4.2004 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen.
Die Aufgabe 2.3* ist eine Zusatzaufgabe. Die 4 Zusatzpunkte können auf diesem oder jedem anderen Aufgabenblatt gegen andere theoretische Aufgaben verrechnet werden.

Numerische Aufgabe 1: (3 num. Punkte) Gegeben sei die singulär gestörte Randwertaufgabe

$$-\epsilon u''(x) + u'(x) = f(x) \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0 \tag{2}$$

mit $0 < \epsilon \ll 1$. Verwenden Sie als rechte Seite

$$f = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} \\ 0 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

a) Diskretisierung mit Finiten Differenzen: u'' werde wie üblich diskretisiert, für die Diskretisierung von u' verwende man

   i) zentrale Differenzenquotienten
   ii) vorwärts Differenzenquotienten
   iii) rückwärts Differenzenquotienten

b) Diskretisierung mit Finiten Elementen: Geben Sie die Variationsvormulierung der Aufgabe (2) an. Implementieren Sie die Diskretisierung mit linearen finiten Elementen.

Berechnen Sie die numerischen Lösungen auf äquidistanten Gittern und stellen Sie diese graphisch dar. Untersuchen Sie die Abhängigkeit der Diskretisierung von ϵ.

c)* (2 num. ZP) Implementieren Sie eine adaptive Gittersteuerung, basierend auf der a-posteriori Fehlerabschätzung aus Satz 3.7. Die Gitterpunkte sollen dabei so gewählt werden, dass η_{I_j} für alle $j = 1, \ldots, n+1$ gleiche Größe besitzt. Der Algorithmus soll abbrechen, falls

$$(\sum_{j=1}^{n+1} \eta_{I_j}^2)^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-3}$$

erfüllt ist. Wie hängt n von ϵ ab?

Die numerische Aufgabe 1 ist in der 19. Woche (3.5.-6.5.2004) vorzugsweise in Raum C 315 vorzuführen. Genauerer Termine können wir in der Übung am 28.4. ausmachen. Es soll in Gruppen von möglichst 2, maximal 3 Studierenden gearbeitet werden. Die numerische Zusatzaufgabe 1 c)* ermöglicht Zusatzpunkte für die numerischen Aufgaben.