Institut für Numerische Mathematik SS 2004
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

Numerik partieller Differentialgleichungen

12. Übungsblatt: 14.7.2004

Aufgabe 12.1: Lumping (4 Punkte)
Es sei $\tilde{M}$ wie in Bemerkung 7.8 definiert und M die Massematrix.
Zeigen Sie, dass bei linearen finiten Elementen für die Diagonalelemente der Matrix $\tilde{M}$

$$\tilde{m}_{ii} = \sum_{j=1}^{nv} m_{ij}$$

gilt.

Aufgabe 12.2: Lumping und Stabilität I (4 Punkte)
Beweisen Sie Folgerung 7.11:
Das Zwischenschritt-σ-Schema (siehe Vorlesung) mit der Lumping-Matrix $\tilde{M}$ anstelle von M ist L^2-Stabil, falls für baryzentrisches Lumping

$$\frac{3}{4}\Delta t(1-2\sigma) \leq \xi^2$$

erfüllt ist. Ist die Zerlegung Z_h schwach spitz, so ist das Schema unter der Bedingung

$$\frac{3}{4}\Delta t(1-\sigma) \leq \xi^2$$

stabil bezüglich der L^∞-Norm. (ξ bezeichen den Durchmesser des kleinsten Inkeises)

Aufgabe 12.3*: Lumping und Stabilität II (4 Zusatzpunkte)
Beweisen Sie Folgerung 7.11 wie in Aufgabe 12.2, aber für circumzentrisches Lumping. Dabei lauten die Bedingungen für die L^2-Stabilität

$$\Delta t(1-2\sigma) \leq \xi^2$$

und für die L^∞-Stabilität

$$\Delta t(1-\sigma) \leq \xi^2.$$

Aufgabe 12.4: Ritz-Projektion (4 Punkte)
Beweisen Sie Hilfssatz 7.15 für $k = 1$ und lineare finite Elemente:

$$R_h : H_0^1(\Omega) \to B_h, \quad (\nabla R_h v, \nabla \phi) = (\nabla v, \nabla \phi) \quad \forall\, \phi \in V_h$$

heißt Ritz-Projektion und erfüllt für $v \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$$\|R_h v - v\|_{L^2(\Omega)} + h\,\|\nabla(R_h v - v)\|_{L^2(\Omega)} \leq c h^s\,\|v\|_{H^s(\Omega)}$$

für $1 \leq s \leq k + 1$.

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 14.7.2004 zu Beginn der Übung.
In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen.