Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

SS 2004

Numerik partieller Differentialgleichungen

11. Übungsblatt: 7.7.2004

Aufgabe 11.1: Inverse Ungleichung (4 Punkte)
Beweisen Sie Hilfssatz 7.6.
Es sei V_h der über Z_h definierte Finite Element Raum mit linearen Elementen. Dann gilt für alle $v \in V_h$

$$\|\nabla v\|^2 \leq \frac{18}{\xi^2} \|v\|^2 ,$$

wobei ξ den Radius des kleinsten Inkreises in Z_h bezeichnet.

Aufgabe 11.2: (4 Punkte)
Zeigen Sie:
Ist A eine symmetrische und positiv definite L_0 Matrix, so ist A inversmonoton d.h. A^{-1} existiert und $A^{-1} \geq 0$ (vergleiche Satz 5.10).

Aufgabe 11.3: (4 Punkte)
Bezeichnen P_1, P_2, P_3 die Eckpunkte des Dreiecks T.

a) Zeigen Sie, daß für $f \in \mathcal{P}_1(T)$ die Quadraturformel

$$\int_T f(x)dx \approx \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^{3} f(P_i) =: Q(f)$$

exakt ist.

b) Geben Sie die Funktionen aus $f \in \mathcal{P}_2(T)$ an, für die $Q(f) = 0$ gilt.

Aufgabe 11.4: (4 Punkte)
Sei $\mathcal{T}_h$ Triangulierung von Ω. Die baryzentrische duale Vernetzung $\mathcal{T}_h^*$ von Ω entsteht aus $\mathcal{T}_h$, indem die Schwerpunkte der Dreiecke mit den Seitenmitten verbunden werden. Jeder Eckpunkt P_i der Triangulierung $\mathcal{T}_h$ liegt dann in genau einem dualen Patch D_i.
Zeigen Sie: Mit $\phi_i := \mathcal{X}_{D_i}$ gilt

$$\int_\Omega \phi_i \phi_j dx = \frac{1}{3} \delta_{ij} |s_i| ,$$

wobei $s_i :=$ supp b_i, b_i die lineare Ansatzfunktion zu Eckpunkt P_i bezeichnet.

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 7.7.2004 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen.