Institut für Numerische Mathematik SS 2004
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

Numerik partieller Differentialgleichungen

10. Übungsblatt: 30.6.2004

Aufgabe 10.1: (4 Punkte)
Es sei $u \in H^{1,p}(\Omega)$ schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \text{ in } \Omega_\alpha, \\ u &= g \text{ auf } \Gamma_D, \\ \partial_\eta u &= 0 \text{ auf } \Gamma_N, \end{aligned} \tag{1}$$

mit $\Omega_\alpha := \{(r\cos\phi, r\sin\phi);\ 0 < r < 1,\ 0 < \phi < \alpha\pi\}$, $\Gamma_N = \emptyset$ und $\Gamma_D = \partial\Omega$. Die Randwerte g seien durch die Funktion

$$g(r,\phi) := r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\phi}{\alpha} - \frac{r^2}{4}$$

festgelegt. Die Lösung des Problems (1) ist dann $u(r,\phi) = g(r,\phi)$ und mit $\beta = \frac{1}{\alpha}$ gilt für alle $\epsilon > 0$ die Fehlerabschätzung

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \le c h^{\beta - \epsilon} |u|_{H^{1,p}(\Omega)},$$

wobei $p = \frac{2}{1-\beta} - \epsilon$.
Entwickeln Sie ausgehend von dieser Fehlerabschätzung einen Fehlerindikator für das Problem (1) gemäß Eriksson/Johnson (siehe Vorlesung).

Aufgabe 10.2: (4 Punkte)
Formulieren Sie Satz 3.8 für den Fehlerschätzer nach Bank und Weiser, (sieheVorlesung) und führen Sie für diesen Spezialfall dessen Beweis für das Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_D, \\ \partial_\eta u &= g \text{ auf } \Gamma_N. \end{aligned} \tag{2}$$

durch.

Aufgabe 10.3: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Variationsproblem

$$\int_T \nabla e_T \nabla v dx = \int_T f v dx + \frac{1}{2} \sum_{l \in E_T} \int_l J_l v ds \ \ \forall v \in V := \mathcal{P}_2^0(T)$$

mit $\mathcal{P}_2^0(T) := \{v \in \mathcal{P}_2(T); v(P) = 0, P \text{ Ecke von } T\}$ genau eine Lösung besitzt. Dabei ist J_l wie in der Vorlesung definiert. Diskutieren Sie auch den Fall $V := \mathcal{P}_1(T)$.

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 30.6.2004 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen.

Numerische Aufgabe 5: (3 num. Punkte + 4 Zusatzpunkte)

a) Schreiben Sie ein Computer-Programm, zur numerischen Lösung von gleichmäßig elliptischen Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(A\nabla u) + cu &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ auf } \Gamma_D, \\ \partial_\eta u + \alpha u &= h \text{ auf } \Gamma_N. \end{aligned} \tag{3}$$

Benutzen Sie lineare finite Elemente. Testen Sie Ihr Programm am Beispiel (1), für verschedene $\alpha \in (0,2)$ und ermittlen sie numerisch die Konvergenzordnung bez. $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$.

b)* Implementieren Sie Algorithmus 6.34 für eine Gleichverteilung des Fehlers (Equidistribution) und testen Sie Ihr Programm an Beispiel (2). Wählen Sie z.B $\Omega = \Omega_\alpha$ aus Aufgabe 10.1, $f = 0$ und

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_1 = \{0\} \times [0,1], \\ \partial_\eta u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_2 = \{x_1 = r\cos(\alpha\pi), x_2 = r\sin(\alpha\pi), r \in (0,1)\}, \\ u &= \sin(\frac{1}{2\alpha}\phi) \quad \text{auf } \Gamma_3 = \{x_1 = \cos\phi, x_2 = \sin\phi, \phi \in (0,\alpha\pi)\}, \end{aligned}$$

mit α aus den Bereichen $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ und $\alpha \in (1,2)$. Geben Sie die Gitter jeweils für 2 verschiedene Toleranzen (z.B. $tol = 0.1$, $tol = 0.01$) aus.

Die numerische Aufgabe 5 ist in der 28. Woche (5.7.-9.7.2004) vorzugsweise in Raum C 315 vorzuführen. Genauere Termine können wir in der Übung am 30.6. ausmachen. Es soll in Gruppen von möglichst 2, maximal 3 Studierenden gearbeitet werden.