Institut für Numerische Mathematik SS 2004
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

Numerik partieller Differentialgleichungen

1. Übungsblatt: 21.4.2004

Aufgabe 1.1: (4 Punkte (2+2))

a) Zeigen Sie, dass alle Lösungen von

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

die Form

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

besitzen. Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ zu den Anfangsdaten $u(x,0) = \sin(x), u_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie die Bereiche der (x,y)-Ebene, in denen die Gleichung

$$(1+x)u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + u_x = 0$$

elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist und zeichnen Sie diese.

Aufgabe 1.2: (Fundamentallemma der Variationsrechnung) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ und es gelte

$$\int_\Omega f\varphi dx = 0 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), \varphi = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

Zeigen Sie: Dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \bar{\Omega}$.

Aufgabe 1.3: (4 Punkte)
Seien $N \in \mathbb{N}, h = \frac{1}{N+1}, x_0 = 0, x_i = ih, I_i = (x_{i-1}, x_i)$ für $i = 1, \ldots, N+1$ und

$V_h := \{v_h \in \mathcal{C}^0([0,1]) : v_h(0) = 0, v_h|_{I_i}$ ist Polynom 1. Grades, $i = 1, \ldots, N+1\}$.

Die Funktionen $\varphi_i \in V_h$ seien gegeben durch
$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad i = 1, \ldots, N+1, \ \ j = 0, \ldots, N+1$.
Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' dx \qquad (i,j = 1, \ldots, N+1).$$

Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$M := (\int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx)_{i,j} \in \mathbb{R}^{N+1 \times N+1} \quad \text{und} \quad A := (\int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' dx)_{i,j} \in \mathbb{R}^{N+1 \times N+1}$$

symmetrisch und positiv definit (spd) sind.

Aufgabe 1.4: (6 (3+3) Punkte)

a) Sei $a(v,w) := \int_0^1 (v'w' + vw)dx$ für $v, w \in V$ und
$F(v) := \frac{1}{2}\int_0^1 ((v')^2 + v^2)dx - \int_0^1 fvdx.$
Zeigen Sie: $u \in V, F(u) = \min_{v \in V} F(v) \Leftrightarrow a(u,v) = (f,v) \ \forall v \in V.$
Dabei sei der Raum V der Raum der stückweise differenzierbaren Funktionen mit $v(0) = 0$, vergl. Vorlesung.

b) Sei $u \in \mathcal{C}^2[0,1]$ und

$$-u'' + u = f \text{ in } (0,1), \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

Zeigen Sie:

$$||u||_{\mathcal{C}^1[0,1]} + \left(\int_0^1 (u'')^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq c \left(\int_0^1 f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

mit einer von u und f unabhängigen Konstante c.

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 21.4.2004 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen.