Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes WS 2003/2004

Numerik der gewöhnlichen Differentialgleichungen

2. Übungsblatt: 13.11.2003

Aufgabe 2.1: (4 Punkte)
Beweisen Sie den Satz 3.14 aus der Vorlesung.
Satz 3.14 (Rundungsfehler):

$$\begin{aligned} y^{i+1} &= y^i + h\,\phi(t_i, y^i, h), \quad y^0 = y(0) \\ \tilde{y}^{i+1} &= \tilde{y}^i + h\,\phi(t_i, \tilde{y}^i, h) + \epsilon_{i+1}, \quad \tilde{y}^0 = y(0) + \epsilon_0 \end{aligned}$$

Sei ϕ L-stetig bezüglich y. Dann gilt für $\delta_i := \tilde{y}^i - y^i$:

$$|\delta_m| \leq (|\delta_0| + m\epsilon)\, e^{m\,L\,h} = (|\delta_0| + \frac{t_m - t_0}{h}\epsilon)\, e^{L\,(t_m - t_0)}$$

mit $t_m - t_0 = \alpha$. Diskutieren Sie in bis zu 3 Sätzen die Konsequenzen.

Aufgabe 2.2: (4 Punkte)
Geben Sie alle Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $p = 2$ der Form

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & c_3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

an. Warum besitzen derartige Runge-Kutta-Verfahren die Eigenschaft, dass sie nur relativ wenig Speicherplatz erfordern?

Aufgabe 2.3: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass ein s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p für $y' = P(t)$, $P(t)$ ein Polynom vom Grad höchstens $p-1$, die exakte Lösung liefert.

Aufgabe 2.4: (4+4ZP Punkte (4+4ZP))

a) Beweisen Sie: Wendet man eine explizites s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren auf die Anfangswertaufgabe

$$y' = \lambda y, \quad y(t_0) = y_0, \lambda : \text{ komplexe Konstante},$$

an, so gilt

$$u_{m+1}^{(i)} = P_i(h\lambda)u_m, \quad i = 1, \ldots, s$$

mit Polynomen P_i vom Grad höchstens i.

b)* wie Aufgabe a) aber für ein implizites Runge-Kutta-Verfahren. Dabei gilt:

$$u_{m+1}^{(i)} = R_i(h\lambda)u_m, \quad i = 1, \ldots, s$$

mit rationalen Funktionen R_i vom Grad höchstens i.

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 13.11.2003 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen.
Die Aufgabe 2.4 b)* ist eine Zusatzaufgabe. Die 4 Zusatzpunkte (ZP) zählen nicht mit zu den 50% pro Blatt, können aber für dieses Blatt oder andere Blätter verwendet werden, falls bei einem Blatt die Mindestpunktzahl nicht erreicht wurde.
Beachten Sie bitte, dass in dieser Woche dann auch die erste numerische Aufgabe vorzuführen ist.