Institut für Numerische Mathematik WS 2003/2004
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

Numerik der gewöhnlichen Differentialgleichungen

1. Übungsblatt: 30.10.2003

Aufgabe 1.1: (3 Punkte)
Formulieren Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1''(t) &= t^2 - y_1'(t) - y_2(t)^2 \\ y_2''(t) &= t + y_2'(t) - y_1(t)^3 \\ y_1(0) &= 0, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0 \end{aligned}$$

in ein Anfangswertproblem für ein System erster Ordnung der Form
$Y'(t) = f(t, Y(t)), \quad Y(0) = Y_0$ um. Wie sehen f und Y_0 aus?

Aufgabe 1.2: (2 Punkte)
Wenden Sie die Picard-Iteration auf folgende Anfangswertaufgabe an:

$$\begin{aligned} y' &= y \cos t \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Berechne Sie 4 Iterationen. Wie lautet die exakte Lösung?

Aufgabe 1.3: (6 Punkte (3+3))
Zur genäherten Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y),\ y(a) = y_0 \qquad (y_0 \in I\!R^N, f\ :\ [\,a, b\,] \times I\!R^N \to I\!R^N)$$

werden die nachfolgend vorgestellten Einschrittverfahren Runge(3,3) von Runge und Heun(3,3) von Heun benutzt.
Runge(3,3):

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3) \\ k_1 &:= f(x_n, y_n), \quad k_2 := f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h\, k_1) \\ k_3 &:= f(x_n + h, y_n + h\,(-k_1 + 2k_2)) \end{aligned}$$

Heun(3,3):

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3) \\ k_1 &:= f(x_n, y_n), \quad k_2 := f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}h\, k_1) \\ k_3 &:= f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}h\, k_2) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Verfahren Runge(3,3) und Heun(3,3) genau die Ordnung 3 haben.

b) Die Aufgabe

$$y'' = e^y, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1$$

lässt sich als Anfangswertaufgabe eines Systems von 3 Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, y_3), \ \ y_i(0) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, 3),$$

formulieren, wobei die f_i Potenz-Funktionen von y_1, y_2, y_3 sind. Geben Sie f_i an und führen Sie für dieses System mit $h = 0.1$ mit den Verfahren aus a) jeweils zwei Schritte durch.

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 30.10.2003 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch bespochen.

Numerische Aufgabe 1:
Lösen Sie die van der Pol'sche Differentialgleichung

$$y'' - \lambda(1 - y^2)y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \tag{1}$$

für $\lambda = 0$ und $\lambda = 12$ numerisch mit dem expliziten Euler-Verfahren sowie dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren (aus Def. 3.9 der VL). Geben Sie jeweils für konstante Schrittweite $h = 0.025$ und konstante Schrittweite $h = 0.0025$ die Näherungswerte an den Gitterpunkten $t = 0.5, 1.0, 1.5, \ldots, 15$ tabellarisch aus. Ferner ist die Lösung graphisch darzustellen. Die Programmiersprache ist beliebig.
Tipp: Schreiben Sie (1) als System erster Ordnung um.

Die numerische Aufgabe 1 ist in der 46. Woche (13.11.-14.11.2003) in den Vorangzeiten am Rechner vorzuführen. Es soll in Gruppen von möglichst 2, maximal 3 Studierenden gearbeitet werden.