Prof. Dr. M. Hinze WS 2006/2007

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis
Blatt 9
Abgabetermin: 15.01.2007 vor der Übung

Aufgabe 1: (4 Punkte) (Norm des adjungierten Operators). Seien X, Y normierte Räume, $A \in L(X,Y)$ und $A' \in L(Y', X')$ der zu A adjungierte Operator. Zeigen Sie

$$\|A'\|_{L(Y',X')} = \|A\|_{L(X,Y)}.$$

Tipp: Folgerungen aus den Hahn–Banach Sätzen

Aufgabe 2: (4 Punkte) (Ein Minimum Problem wiederbesucht). Sei X reflexiv und $M \subseteq X$ abgeschlossen, konvex und nichtleer. Zeigen Sie, dass es dann zu jedem $x_0 \in X$ ein $x \in M$ gibt mit

$$\|x_0 - x\|_X = dist(x_0, M).$$

Aufgabe 3: (4 Punkte) (Schwache versus starke Konvergenz im Hilbert Raum). Sei X Hilbert Raum. Zeigen Sie für Folgen $(x_k) \subset X$:

$$x_k \to x \text{ für } k \to \infty \text{ in } X \text{ gdw } \begin{cases} x_k \rightharpoonup x \text{ für } k \to \infty \text{ in } X \text{ und} \\ \|x_k\|_X \to \|x\|_X. \end{cases}$$

Aufgabe 4: (4 Punkte) Seien X, Y normierte Räume, $T \in L(X,Y)$. Zeigen Sie, dass T schwach stetig ist, d.h.

$$x_k \rightharpoonup x \text{ für } k \to \infty \text{ in } X \Longrightarrow Tx_k \rightharpoonup Tx \text{ für } k \to \infty \text{ in } Y.$$