Prof. Dr. M. Hinze WS 2006/2007

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis
Blatt 8
Abgabetermin: 08.01.2007 vor der Übung

Aufgabe 1: (4 Punkte) Seien X, Y Banach Räume, $A : X \to Y$ und $B' : Y' \to X'$ linear mit

$$\langle B'y', x\rangle_{X',X} := \langle y', Ax\rangle_{Y',Y} \text{ für alle } x \in X, y' \in Y'.$$

Weisen Sie $A \in L(X,Y)$ und $B' \in L(Y', X')$ nach.

Aufgabe 2: (4 Punkte) (Trennungssatz im Hilbert Raum, abgeschlossener linearer Teilraum). Sei X Hilbert Raum, $Y \subset X$ abgeschlossener Teilraum, $x_0 \in X \setminus Y$. Konstruieren Sie $x' \in X'$ mit

$$x'_{|Y} = 0, \quad \|x'\|_{X'} = 1 \text{ und } \langle x', x_0\rangle_{X',X} = dist(x_0, Y).$$

Geben Sie den Riesz–Repräsentanten von x' an.

Aufgabe 3: (4 Punkte) (Trennungssatz im Hilbert Raum, abgeschlossene konvexe Teilmenge). Sei X Hilbert Raum, $M \subset X$ abgeschlossen und konvex, $x_0 \in X \setminus M$. Konstruieren Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x' \in X'$ mit

$$\Re\langle x', x_0\rangle_{X',X} > \alpha \text{ und } \Re\langle x', x\rangle_{X',X} \le \alpha \text{ für alle } x \in M.$$

Geben Sie den Riesz–Repräsentanten von x' an.

Aufgabe 4: (4 (2+2) Punkte) (Punktweise Konvergenz in $L(X,Y)$). Sei X Banach Raum, Y normierter Raum. Für $(T_n)_n \subset L(X,Y)$ existiere

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

für alle $x \in X$. Zeigen Sie

a) $T \in L(X,Y)$ mit $\|T\|_{L(X,Y)} \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{L(X,Y)}$.

b) $\|T - T_n\|_{L(X,Y)} \to 0$ für $n \to \infty$ kann i.d.R. **nicht** erwartet werden. Tipp: Betrachten Sie $T_n x := (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$ auf $l^2(\mathbb{K})$.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest und einen guten Rutsch nach 2007