Prof. Dr. M. Hinze WS 2006/2007

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 5

Abgabetermin: 04.12.2006 vor der Übung

Aufgabe 1: (6 Punkte 2+4) Sei (a_{ik}) unendliche Matrix mit

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die Matrixtransformation $K : l^2(\mathbb{K}) \to l^2(\mathbb{K})$, $x = (x_k)_k \mapsto Kx$ definiert durch

$$Kx := \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right)_i$$

a) stetig ist und

b) auch kompakt.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Seien X, Y normierte Räume und Y vollständig, also Banachraum. Es seien $K, K_n \in L(X,Y)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\overline{K_n(B_1(0))} \subset Y$ sei kompakt für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ferner gelte $\|K_n - K\|_{L(X,Y)} \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{K(B_1(0))} \subset Y$ kompakt ist. In der Definition von $K(X,Y)$ hätten wir also auch auf die Vollständigkeit von X verzichten können.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Weisen Sie nach, dass auf die Vollständigkeit von X in Satz 2.11 der Vorlesung (Neumann Reihe) i.d.R. nicht verzichtet werden kann. Betrachten Sie dazu den Raum $X := \{x \in l^2(\mathbb{R}); x_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{N}\} \subset l^2(\mathbb{R})$ zusammen mit dem Shiftoperator

$$(Tx)_i := \begin{cases} 0, & i = 1, \\ r x_{i-1}, & i > 1, \end{cases}$$

wobei $r > 0$ geeignet vorgelegt sei.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Sei $I = [0,1]$, $C(I)$ mit der Supremumsnorm normiert und

$$K : C(I) \to C(I); \quad (Kf)(s) := \int_0^1 s f(t) dt \text{ für } s \in I.$$

Weisen Sie $\|K\|_{L(C(I))} = 1$ nach und zudem, dass $(I - K)^{-1} \in L(C(I))$ existiert, d.h. die Operator Gleichung

$$f(s) - \int_0^1 s f(t) dt = g(s) \text{ für } s \in I$$

besitzt für jede Funktion $g \in C(I)$ genau eine Lösung. Tipp: Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} \|K^n\|_{L(C(I))}^{\frac{1}{n}}$. Also ist $\|K\|_{L(C(I))} < 1$ eine hinreichende, nicht aber eine notwendige Bedingung für die Existenz von $(I - K)^{-1} \in L(C(I))$.