Prof. Dr. M. Hinze WS 2006/2007

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis
Blatt 4
Abgabetermin: 27.11.2006 vor der Übung

Aufgabe 1: (4 Punkte) (Heisenberg Relation). Sei X normierter Raum und $P, Q : X \to X$ lineare Abbildungen, welche die sogenannte Heisenberg Relation

$$PQ - QP = Id_X$$

erfüllen. Weisen Sie nach, dass Q und P nicht stetig sein können.

Aufgabe 2: (4 Punkte) (Volterra Integralgleichung). Sei $I = [a, b]$ abgeschlossenes Intervall mit $a < b$ und $(s, t) \mapsto k(s, t)$ eine auf $a \leq s \leq t \leq b$ stetige Funktion (stetiger Kern). Weisen Sie nach, dass die Volterra Integralgleichung 2ter Art

$$f(\bullet) - \int_a^{\bullet} k(\bullet, t) f(t) dt = g(\bullet) \text{ in } C^0(I)$$

für jede gegebene Funktion $g \in C(I)$ eine eindeutige Lösung $f \in C(I)$ besitzt. Dabei ist wie üblich $C(I)$ mit der Supremumsnorm $\| \bullet \|_\infty$ normiert.

Aufgabe 3: (4 Punkte) (Kompakte Einbettung). Sei $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Weisen Sie nach, dass dann die Einbettung

$$Id : (C^{0,\beta}(\bar{\Omega}), \| \bullet \|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})}) \to (C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \| \bullet \|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})})$$

stetig und auch kompakt ist.

Aufgabe 4: (4 (1+1+2) Punkte) Es bezeichne $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Berechnen Sie die Operatornorm $\|A\|$ von A für die Vektornormen i.) $\| \bullet \|_\infty$, ii.) $\| \bullet \|_1$ und iii.) $\| \bullet \|_2$.