Prof. Dr. M. Hinze WS 2006/2007

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis
Blatt 3
Abgabetermin: 20.11.2006 vor der Übung

Aufgabe 1: (4 Punkte) (Banach'scher Fixpunktsatz) Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung, d.h. T sei Lipschitz stetig mit einer Lipschitz Konstanten $\kappa < 1$. Weisen Sie nach, dass es genau ein $x^* \in X$ gibt mit $T(x^*) = x^*$, d.h. T besitzt in X genau einen Fixpunkt.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $A \subset (C^0(\bar{\Omega}), \|\bullet\|_\infty)$ beschränkt, $k \in C^0(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$. Weisen Sie nach, dass die Funktionenmenge

$$\mathcal{B} := \left\{ g : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}; g(x) = \int_\Omega k(x,y) f(y) dy \text{ für } f \in A \right\}$$

präkompakt in $C^0(\bar{\Omega})$ ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Sei (X, d_X) kompakter metrischer Raum, (Y, d_Y) metrischer Raum, $f : X \to Y$ stetig. Weisen Sie nach, dass f gleichmäßig stetig ist, d.h.

$$d_Y(f(x), f(y)) \to 0 \text{ für } d_X(x,y) \to 0.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte) Weisen Sie nach, dass $l^p(\mathbb{K})$ für $1 \leq p < \infty$ separabel ist, $l^\infty(\mathbb{K})$ jedoch nicht.