Prof. Dr. M. Hinze WS 2006/2007

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis
Blatt 2
Abgabetermin: 13.11.2006 vor der Übung

Aufgabe 1: (4 Punkte) Bezeichne

$$C^1([a,b]) := \{f : (a,b) \to \mathbb{R}, f, f' \text{ stetig auf } [a,b] \text{ fortsetzbar}\}$$

. Weisen Sie nach, dass $(C^1([a,b]), \| \bullet \|_\infty)$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte) (Lineare Projektoren). Sei X HR und $A \subset X$ abgeschlossen und linearer Teilraum, d.h.

$$x, y \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Longleftrightarrow \alpha x + \beta y \in A.$$

Zeigen Sie, dass dann die orthogonale Projektion $P : X \to A$ eine lineare Abb. darstellt und Px charakterisiert wird durch

$$(x - Px, a - Px)_X = 0 \quad \forall a \in A, \quad \text{d.h. } x - Px \text{ steht senkrecht auf } A.$$

Aufgabe 3: (6 (2+2+2) Punkte) (Kompakte Mengen in $l^2(\mathbb{R})$). Welche der folgenden Mengen sind beschränkt, welche kompakt?

a) $E_1 := \{x \in l^2(\mathbb{R}); |x_i| \leq \frac{1}{i} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}$,

b) $E_2 := \{x \in l^2(\mathbb{R}); |x_i| \leq \frac{1}{\sqrt{i}} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}$,

c) $E_2 := \{x \in l^2(\mathbb{R}); \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 4: (10 (4+6) Punkte) (Hölderstetige Funktionen, Vollständigkeit und Kompaktheit). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $(Y, \| \bullet \|)$ Banachraum. Für $f : \bar{\Omega} \to Y$ und $0 < \alpha \leq 1$ heißt

$$\text{höl}_\alpha(f, \bar{\Omega}) := \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{|x - y|^\alpha}; x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y \right\}$$

Hölder Konstante von f auf $\bar{\Omega}$ zum Exponenten α. Für $\alpha = 1$ wird $\text{lip}(f, \bar{\Omega}) := \text{höl}_1(f, \bar{\Omega})$ Lipschitz Konstante von f auf $\bar{\Omega}$ genannt.

a) Weisen Sie nach,dass für $m \in \mathbb{N}$

$$C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}, Y) := \{f \in C^m(\bar{\Omega}, Y); \text{höl}_\alpha(\partial^s f, \bar{\Omega}) < \infty \text{ für } |s| = m\}$$

zusammen mit der Norm

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}, Y)} := \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_\infty + \sum_{|s| = m} \text{höl}_\alpha(\partial^s f, \bar{\Omega})$$

einen Banachraum definiert, vergl. Aufgabe 1.4b.

b) Sei $Y = \mathbb{R}^l$ und $A \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, Y)$ beschränkt. Weisen Sie nach, dass A präkompakt ist. Tipp: Satz von Arzela–Ascoli.