Prof. Dr. M. Hinze WS 2006/2007

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis
Blatt 12
Abgabetermin: 05.02.2007 vor der Übung

Aufgabe 1: (4 Punkte (2+2)) Seien X,Y,Z normierte Räume. Zeigen Sie

a) $(AB)' = B'A'$ für $A \in L(X,Y), B \in L(Y,Z)$.

b) $A''J_X = J_Y A$ für $A \in L(X,Y)$. Dabei bezeichnen $J_X : X \to X''$ und $J_Y : Y \to Y''$ die entsprechenden Isometrien aus Satz 4.6.

Aufgabe 2: (4 Punkte (2+2)) (Stetige Projektoren) Sei X normierter Raum und

$$P(X) := \{P \in L(X); P^2 = P\}$$

die Menge der stetigen, linearen Projektoren auf X. Weisen Sie nach:

a) $N(P) \equiv \ker P$ und $R(P) \equiv \operatorname{Im} P$ sind abgeschlossen,

b) $\|P\|_{L(X)} \geq 1$ oder $P \equiv 0$.

Aufgabe 3: (4 Punkte) (Lineare orthogonale Projektoren) Sei X Hilbert Raum und $P : X \to X$ linear. Weisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen nach.

a) $\|x - Px\|_X \leq \|x - Py\|_X$ für alle $x, y \in X$, d.h. P ist orthogonale Projektion auf $R(P)$, vergl. Satz 1.23 und A2.2,

b) $P^2 = P$ und $(Px, y)_X = (x, Py)_X$ für alle $x, y \in X$,

c) $P \in P(X)$ mit $\|P\|_{L(X)} \leq 1$.

Aufgabe 4: (6 Punkte (2+2+2)) (Stückweise konstante Approximationen) Sei $I := [0,1]$ und zu $n \in \mathbb{N}$ definiere $x_i^{(n)} := i2^{-n}$ für $i = 0, \ldots, 2^n$ eine äquidistante Unterteilung von I mit Gitterweite $h_n := 2^{-n}$. Ferner bezeichne mit $I_i^{(n)} := (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}) \quad (i = 1, \ldots, 2^n)$

$$X_n := \left\{ \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i \chi_{I_i^{(n)}}; \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ für } i = 1, \ldots, 2^n \right\}$$

den Raum der stückweise konstanten Funktionen zu einer solchen Unterteilung mit $\dim X_n = 2^n$. Wir defininieren für $X = L^p(0,1) (1 \leq p < \infty)$

$$P_n : X \to X; \quad P_n f := \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{1}{h_n} \int_{I_i^{(n)}} f(x)dx \right) \chi_{I_i^{(n)}}.$$

Weisen Sie nach:

a) $R(P_n) = X_n$, $\|P_n\|_{L(X)} \leq 1$,

b) $P_n f \to f$ in X für $n \to \infty$,

c) $\|f - P_n f\|_{1,p} \leq h_n \|f'\|_{L^p(0,1)}$ für alle $f \in H^{1,p}(0,1)$.

Das war's. Wir hoffen, Sie hatten ein bischen Spaß und haben auch etwas gelernt. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg für das weitere Studium und sagen Tschüß bis zum nächsten mal.