Prof. Dr. M. Hinze WS 2006/2007

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis
Blatt 11
Abgabetermin: 29.01.2007 vor der Übung

Aufgabe 1: (4 Punkte) Seien X,Y normierte Räume und $A : X \to Y$ linear. Ferner gelte

$$x_n \rightharpoonup 0 \text{ in } X \text{ für } n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad Ax_n \rightharpoonup 0 \text{ in } Y \text{ für } n \to \infty.$$

Weisen Sie $A \in L(X, Y)$ nach. Tipp: Widerspruchsbeweis; konstruieren Sie eine Nullfolge in X, deren Bildfolge in Y unbeschränkt ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Für $d_n \in \mathbb{R}$ sei $A : l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A((x_n)_n) := (d_n x_n)_n.$$

Zeigen Sie, daß A vollstetig ist gdw durch $(d_n)_n$ eine Nullfolge definiert ist.

Aufgabe 3: (8 Punkte) Weisen Sie nach, daß das Minimum Problem

$$\min_{v \in M} \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - fv dx$$

mit $M := \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq 0 \text{ fast überall in } \Omega\}$ und $f \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.