Prof. Dr. M. Hinze WS 2006/2007

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis
Blatt 1
Abgabetermin: 6.11.2006 vor der Übung

Aufgabe 1: (8 (2+2+2+2) Punkte) Sei (X, τ) topologischer Raum und $A \subset X$. Weisen Sie nach

a) $X \setminus clos(A) = intr(X \setminus A)$.

b) $intr(A)$ ist offen, $clos(A)$ ist abgeschlossen.

c) $A \in \tau \Longleftrightarrow A = intr(A)$ und $X \setminus A \in \tau \Longleftrightarrow A = clos(A)$.

d) (A, τ_A) ist topologischer Raum, wobei $\tau_A := \{U \cap A; U \in \tau\}$ die Relativtopologie bezeichnet.

Aufgabe 2: (6 (2+2+2) Punkte) (Fréchet Metrik). Sei X ein $\mathbb{K}$ Vektorraum und $\rho : X \to \mathbb{R}$ eine *Fréchet Metrik*, d.m. eine Abbildung mit den Eigenschaften

(F1) $\rho(x) \geq 0$, und $\rho(x) = 0$ gdw $x = 0$,

(F2) $\rho(x) = \rho(-x)$ (Symmetrie),

(F3) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ (Dreiecks Ungleichung).

Zeigen Sie:

a) Mit $d(x, y) := \rho(x - y)$ ist (X, d) metrischer Raum.

b) $\rho(x) := \frac{|x|}{1+|x|}$ definiert eine Fréchet Metrik auf $\mathbb{K}^n$, allerdings keine Vektornorm.

c) Sei d Metrik auf X und $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar und strikt monoton mit nichtwachsender Ableitung ϕ'. Ferner gelte $\phi(0) = 0$. Dann ist auch $\phi \circ d$ Metrik auf X.

Aufgabe 3: (10 (2+2+2+2+2) Punkte) Sei (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie

a) $x \mapsto dist(x, A)$ ist Lipschitz stetig mit Liptschitz Konstante $L \leq 1$.

b) Sei $r > 0$. Dann ist $B_r(A)$ offen. Insbesondere sind Kugeln $B_r(x)$ offene Mengen.

c) $B_r(B_s(A)) \subset B_{r+s}(A)$ mit Gleicheit falls X normierter Raum.

d) Ist (X, d) vollständig und $Y \subset X$ abgeschlossen, so ist auch (Y, d) vollständiger metrischer Raum.

e) Ist $Y \subset X$ und (Y, d) vollständiger metrischer Raum, so ist Y abgeschlossen als Teilmenge von (X, d) (kurz: abgeschlossen in X).

Aufgabe 4: (8 (4+4) Punkte) Weisen Sie nach;

a) Bezeichne $\mathcal{P}_n$ zu $n \in \mathbb{N}$ den Raum der reellwertigen Polynome auf $I := [a, b] (a < b)$. Dann ist $(\mathcal{P}, \|\bullet\|_\infty)$ normierter Raum und als solcher nicht vollständig. Dabei bezeichnet

$$\mathcal{P} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty := \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offenes, beschränktes Gebiet, $(Y, \|\bullet\|_Y)$ Banachraum. Bezeichne $C^0(\bar{\Omega}, Y) := \{f : \bar{\Omega} \to Y, f \text{ stetig auf } \bar{\Omega}\}$ die Menge der auf $\bar{\Omega}$ stetigen Funktionen. Dann ist

$$\big(C^0(\bar{\Omega}, Y)\big), \| \bullet \|_\infty)$$

Banachraum, wobei $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|f(x)\|_Y$.