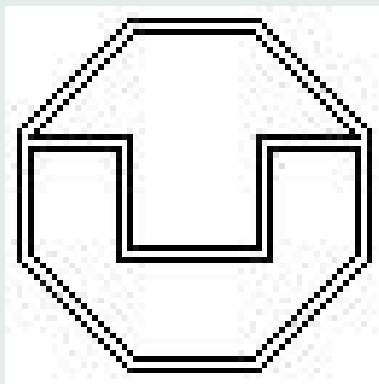


Wozu ist Mathematik gut?

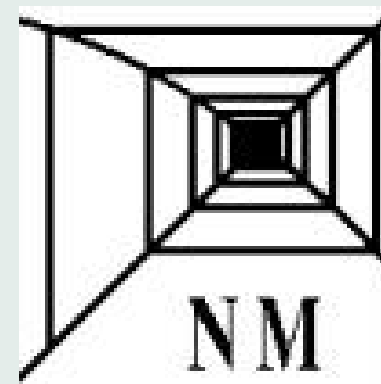
M. Hinze

Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik

hinze@math.tu-dresden.de
www.math.tu-dresden.de/~hinze



Technische Universität Dresden



Institut für Numerische Mathematik

Dresden, 12. Oktober 2004

Mathematik und andere Wissenschaften

Mathematik und andere Wissenschaften

An astronomer, a physicist, and a mathematician (it is said) were holidaying in Scotland. Glancing from a train window, they observed a black sheep in the middle of a field. 'How interesting', observed the astronomer, 'all Scottish sheep are black!' To which the physicist responded, 'No, no! *Some* Scottish sheep are black!'. The mathematician gazed heavenward in supplication, and then intoned, 'In Scotland there exists at least one field, containing at least one sheep, *at least one side of which is black*'.

Von Ian Stuart aus *Concepts of Modern Mathematics*.

Mathematik und andere Wissenschaften

An astronomer, a physicist, and a mathematician (it is said) were holidaying in Scotland. Glancing from a train window, they observed a black sheep in the middle of a field. 'How interesting', observed the astronomer, 'all Scottish sheep are black!' To which the physicist responded, 'No, no! *Some* Scottish sheep are black!'. The mathematician gazed heavenward in supplication, and then intoned, 'In Scotland there exists at least one field, containing at least one sheep, *at least one side of which is black*'.

Von Ian Stuart aus *Concepts of Modern Mathematics*.

Was soll uns das sagen?

Mathematik und andere Wissenschaften

An astronomer, a physicist, and a mathematician (it is said) were holidaying in Scotland. Glancing from a train window, they observed a black sheep in the middle of a field. 'How interesting', observed the astronomer, 'all Scottish sheep are black!' To which the physicist responded, 'No, no! *Some* Scottish sheep are black!'. The mathematician gazed heavenward in supplication, and then intoned, 'In Scotland there exists at least one field, containing at least one sheep, *at least one side of which is black*'.

Von Ian Stuart aus *Concepts of Modern Mathematics*.

Was soll uns das sagen?

Mathematikerinnen und ihre männlichen Zeitgenossen sind pingelig?

Mathematik und andere Wissenschaften

An astronomer, a physicist, and a mathematician (it is said) were holidaying in Scotland. Glancing from a train window, they observed a black sheep in the middle of a field. 'How interesting', observed the astronomer, 'all Scottish sheep are black!' To which the physicist responded, 'No, no! *Some* Scottish sheep are black!'. The mathematician gazed heavenward in supplication, and then intoned, 'In Scotland there exists at least one field, containing at least one sheep, *at least one side of which is black*'.

Von Ian Stuart aus *Concepts of Modern Mathematics*.

Was soll uns das sagen?

Mathematikerinnen und ihre männlichen Zeitgenossen sind pingelig?

oder: Mathematik ist exakt?

Vom Probieren zum Beweis

Vom Probieren zum Beweis

Was unterscheidet die Mathematik von anderen Wissenschaften?

Vom Probieren zum Beweis

Was unterscheidet die Mathematik von anderen Wissenschaften? Die Exaktheit!

Vom Probieren zum Beweis

Was unterscheidet die Mathematik von anderen Wissenschaften? Die Exaktheit!

Zur Illustration betrachten wir folgende Aufgabenstellung:

Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Vom Probieren zum Beweis

Was unterscheidet die Mathematik von anderen Wissenschaften? Die Exaktheit!

Zur Illustration betrachten wir folgende Aufgabenstellung:

Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Modifiziertes Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Vom Probieren zum Beweis

Was unterscheidet die Mathematik von anderen Wissenschaften? Die Exaktheit!

Zur Illustration betrachten wir folgende Aufgabenstellung:

Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Modifiziertes Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Dominostein



Vom Probieren zum Beweis

Was unterscheidet die Mathematik von anderen Wissenschaften? Die Exaktheit!

Zur Illustration betrachten wir folgende Aufgabenstellung:

Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Modifiziertes Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Dominostein



Ist es möglich, das modifizierte Schachbrett mit Dominosteinen vollständig zu bedecken, wobei ein Dominostein immer genau 2 Felder überdeckt?

Vom Probieren zum Beweis

Was unterscheidet die Mathematik von anderen Wissenschaften? Die Exaktheit!

Zur Illustration betrachten wir folgende Aufgabenstellung:

Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Modifiziertes Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Dominostein



Ist es möglich, das modifizierte Schachbrett mit Dominosteinen vollständig zu bedecken, wobei ein Dominostein immer genau 2 Felder überdeckt?

2 mögliche Vorgehensweisen:

- i. Probieren, und über die Anzahl der Versuche ein Postulat erstellen (Beobachtung \rightarrow Experiment \rightarrow Theorie \rightarrow verfeinertes Experiment \rightarrow verfeinerte Theorie uswuf).

Vom Probieren zum Beweis

Was unterscheidet die Mathematik von anderen Wissenschaften? Die Exaktheit!

Zur Illustration betrachten wir folgende Aufgabenstellung:

Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Modifiziertes Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Dominostein



Ist es möglich, das modifizierte Schachbrett mit Dominosteinen vollständig zu bedecken, wobei ein Dominostein immer genau 2 Felder überdeckt?

2 mögliche Vorgehensweisen:

- i. Probieren, und über die Anzahl der Versuche ein Postulat erstellen (Beobachtung \rightarrow Experiment \rightarrow Theorie \rightarrow verfeinertes Experiment \rightarrow verfeinerte Theorie uswuf.
- ii. Exakt beweisen, ob es geht, oder ob nicht.

Vom Probieren zum Beweis

Was unterscheidet die Mathematik von anderen Wissenschaften? Die Exaktheit!

Zur Illustration betrachten wir folgende Aufgabenstellung:

Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Modifiziertes Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Dominostein



Ist es möglich, das modifizierte Schachbrett mit Dominosteinen vollständig zu bedecken, wobei ein Dominostein immer genau 2 Felder überdeckt?

2 mögliche Vorgehensweisen:

- i. Probieren, und über die Anzahl der Versuche ein Postulat erstellen (Beobachtung \rightarrow Experiment \rightarrow Theorie \rightarrow verfeinertes Experiment \rightarrow verfeinerte Theorie uswuf.
- ii. Exakt beweisen, ob es geht, oder ob nicht.

Das Postulat wird lauten: Es geht nicht!

Vom Probieren zum Beweis

Was unterscheidet die Mathematik von anderen Wissenschaften? Die Exaktheit!

Zur Illustration betrachten wir folgende Aufgabenstellung:

Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Modifiziertes Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Dominostein



Ist es möglich, das modifizierte Schachbrett mit Dominosteinen vollständig zu bedecken, wobei ein Dominostein immer genau 2 Felder überdeckt?

2 mögliche Vorgehensweisen:

- i. Probieren, und über die Anzahl der Versuche ein Postulat erstellen (Beobachtung \rightarrow Experiment \rightarrow Theorie \rightarrow verfeinertes Experiment \rightarrow verfeinerte Theorie uswuf.
- ii. Exakt beweisen, ob es geht, oder ob nicht.

Das Postulat wird lauten: Es geht nicht! Das stimmt. Und der Beweis?

Vom Probieren zum Beweis

Was unterscheidet die Mathematik von anderen Wissenschaften? Die Exaktheit!

Zur Illustration betrachten wir folgende Aufgabenstellung:

Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Modifiziertes Schachbrett

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Dominostein



Ist es möglich, das modifizierte Schachbrett mit Dominosteinen vollständig zu bedecken, wobei ein Dominostein immer genau 2 Felder überdeckt?

2 mögliche Vorgehensweisen:

- i. Probieren, und über die Anzahl der Versuche ein Postulat erstellen (Beobachtung \rightarrow Experiment \rightarrow Theorie \rightarrow verfeinertes Experiment \rightarrow verfeinerte Theorie uswuf.
- ii. Exakt beweisen, ob es geht, oder ob nicht.

Das Postulat wird lauten: Es geht nicht! Das stimmt. Und der Beweis?

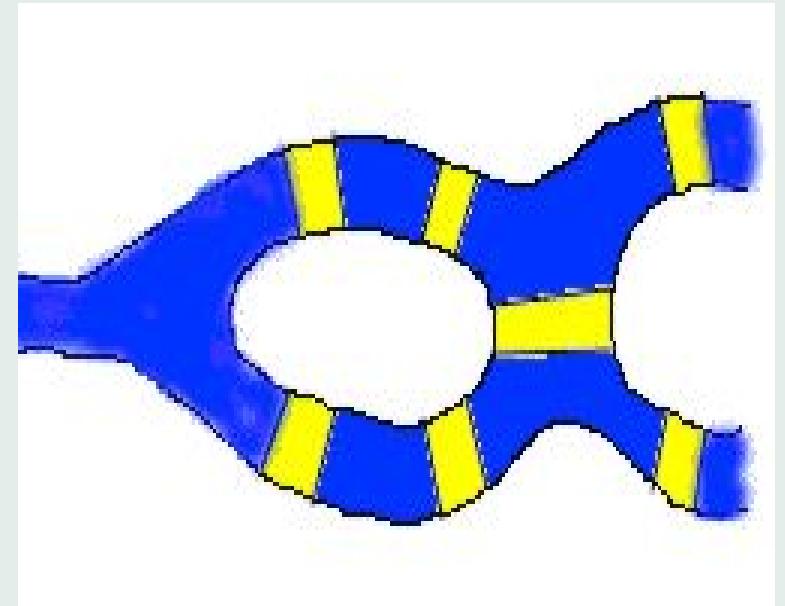
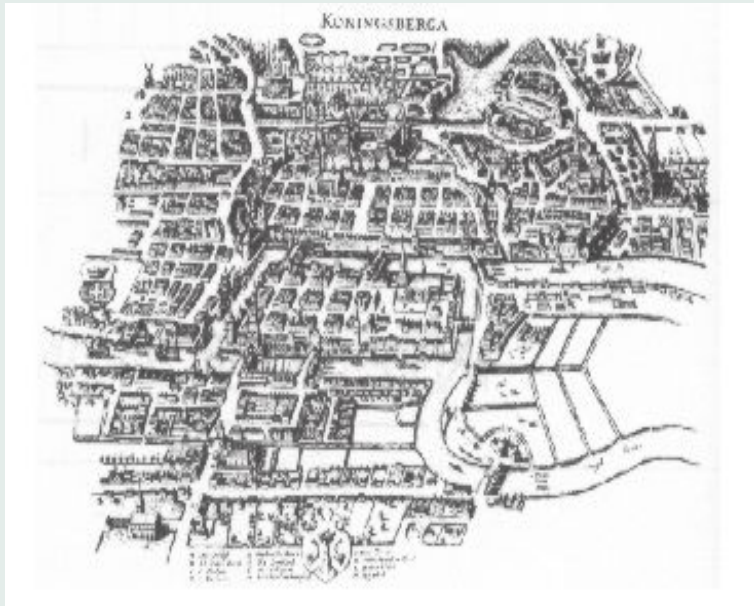
Von der praktischen Aufgabenstellung zur mathematischen Aussage

Das Königsberger Brückenproblem

Von der praktischen Aufgabenstellung zur mathematischen Aussage

Das Königsberger Brückenproblem

Im 18ten Jahrhundert umschloß der Pregel eine Insel und teilte sich danach. Um alle Stadtgebiete zu erreichen, wurden 7 Brücken errichtet.

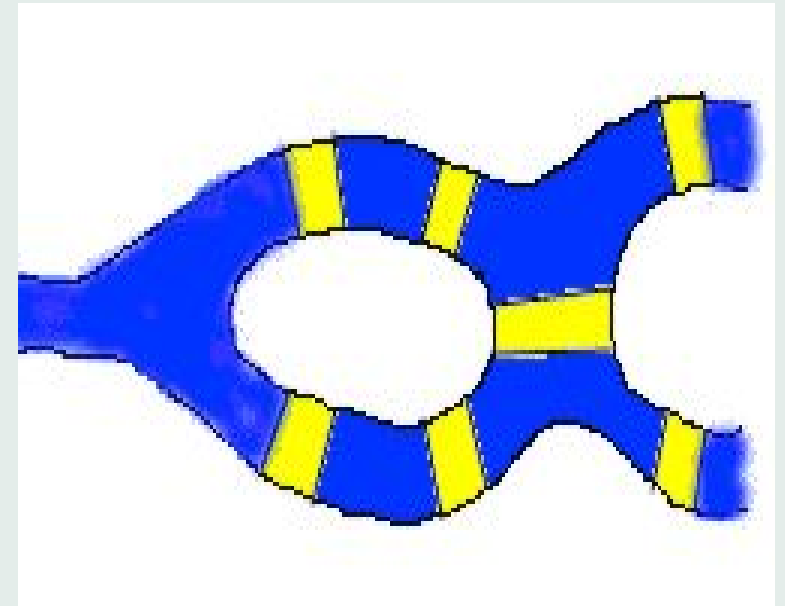
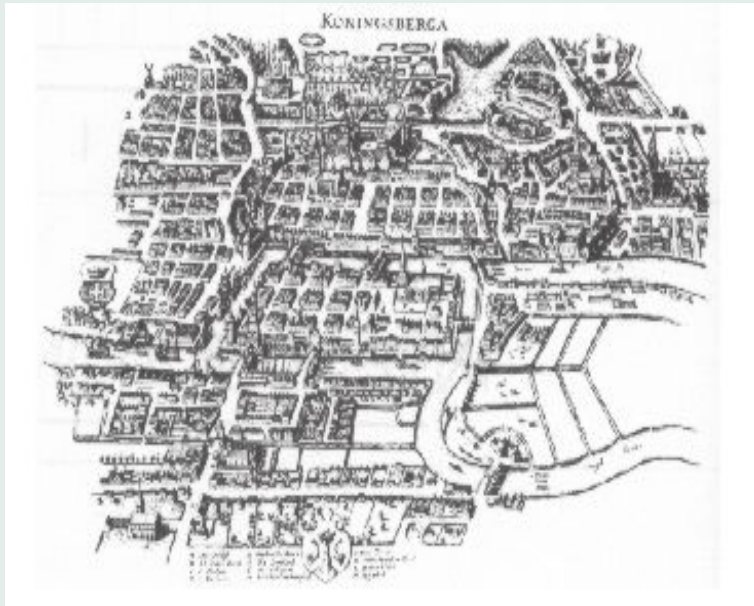


Die Einwohner fragten sich, ob es möglich sei, durch die Stadt zu spazieren und dabei alle Brücken genau einmal zu überqueren.

Von der praktischen Aufgabenstellung zur mathematischen Aussage

Das Königsberger Brückenproblem

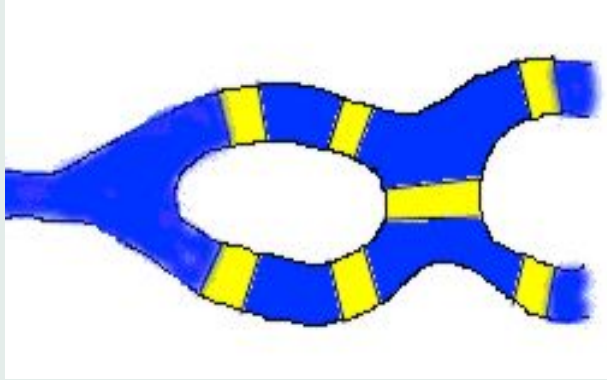
Im 18ten Jahrhundert umschloß der Pregel eine Insel und teilte sich danach. Um alle Stadtgebiete zu erreichen, wurden 7 Brücken errichtet.



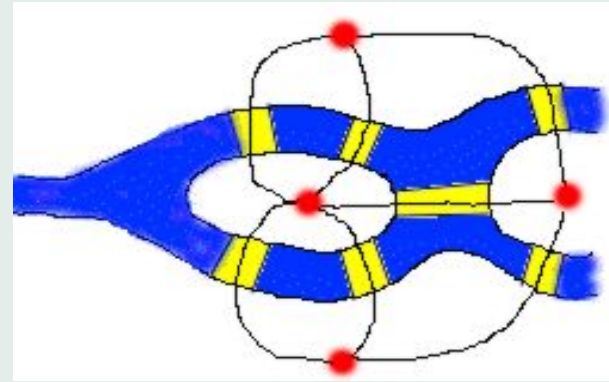
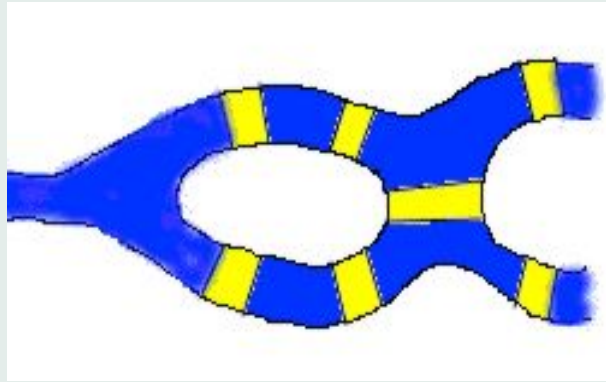
Die Einwohner fragten sich, ob es möglich sei, durch die Stadt zu spazieren und dabei alle Brücken genau einmal zu überqueren.

Leonhard Euler löste 1735 dieses Problem und gründete (so sagt Mensch) die Graphentheorie:
Doch wie ging er dabei vor?

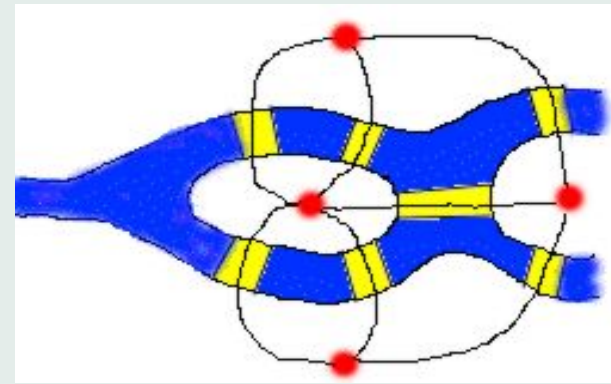
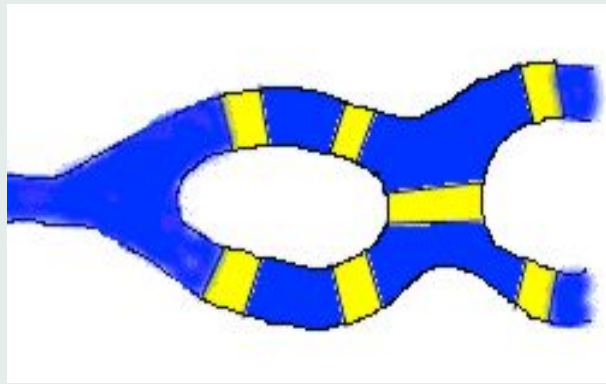
Abstrahieren des Problems:



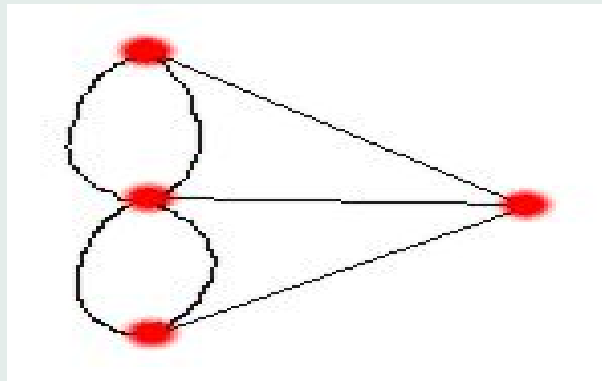
Abstrahieren des Problems:



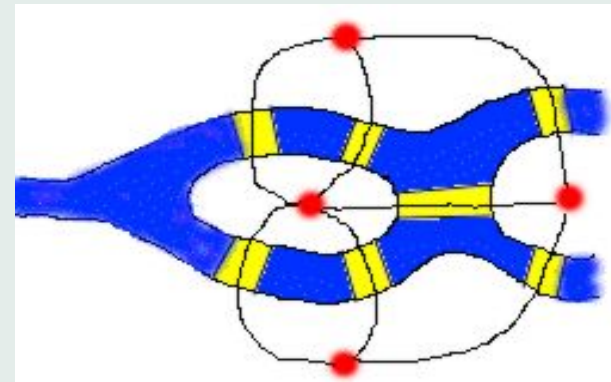
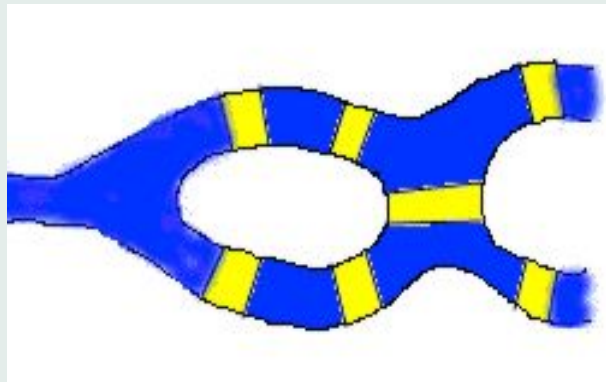
Abstrahieren des Problems:



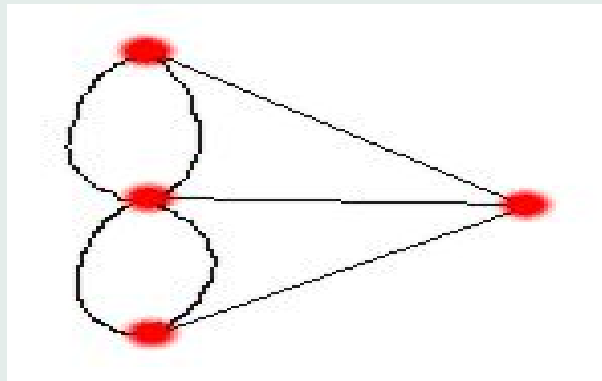
Graph bestehend aus Knoten (rot) und Kanten:



Abstrahieren des Problems:

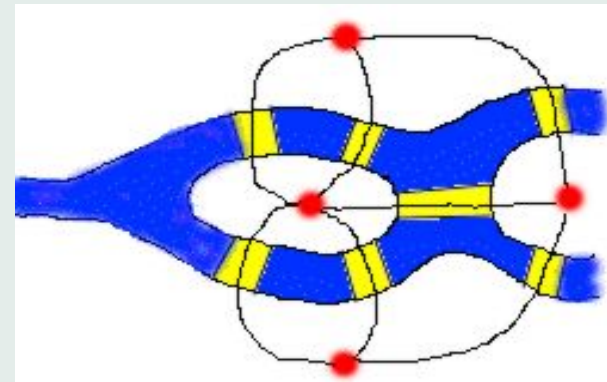
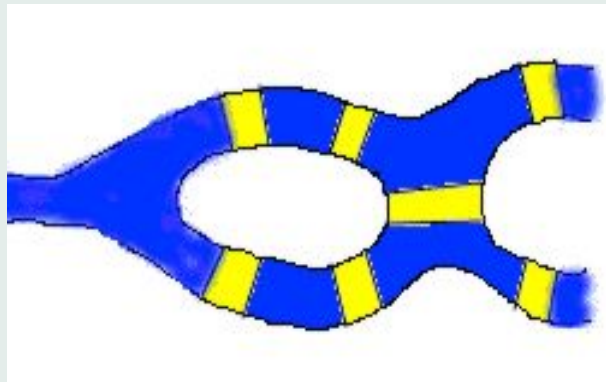


Graph bestehend aus Knoten (rot) und Kanten:

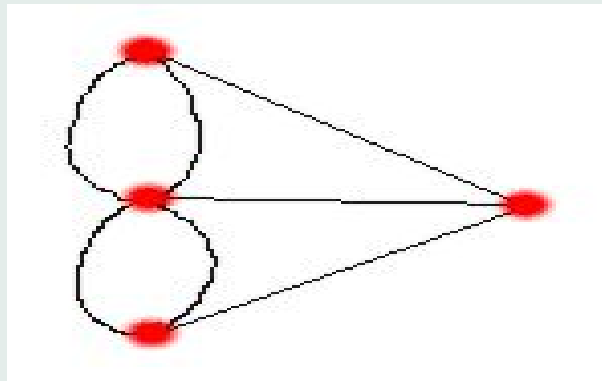


Aufgabenstellung jetzt: Gibt es einen Weg, der jede Kante genau einmal durchläuft, einen sogenannten *Eulerschen Weg*?

Abstrahieren des Problems:



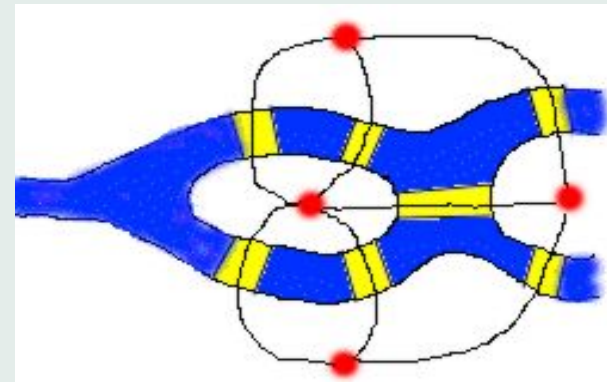
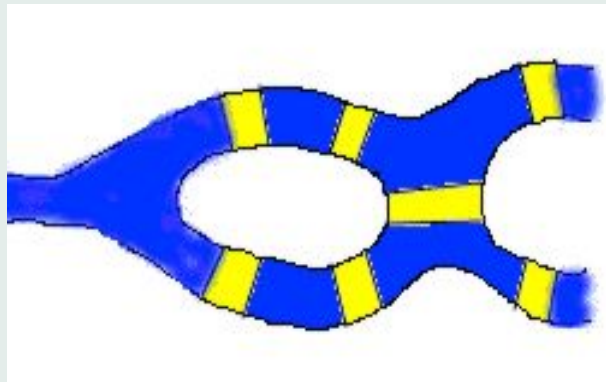
Graph bestehend aus Knoten (rot) und Kanten:



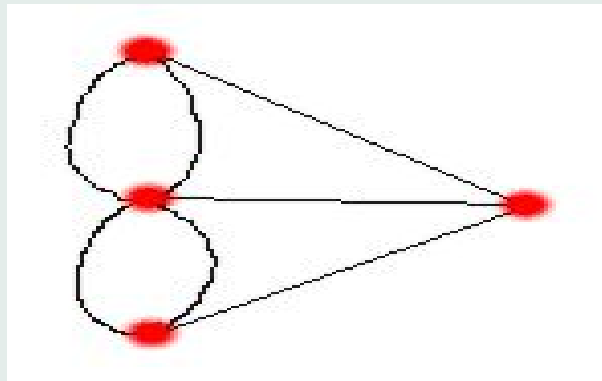
Aufgabenstellung jetzt: Gibt es einen Weg, der jede Kante genau einmal durchläuft, einen sogenannten *Eulerschen Weg*?

Leider nicht! Denn von jedem Knoten (jeder Landmasse) muß eine grade Anzahl von Brücken abgehen (weil ein Knoten nicht über dieselbe Brücke wieder verlassen werden darf). Nur falls Ausgangs- und Endpunkt des Spaziergangs verschieden sind, dürfen die entsprechenden Knoten mit einer ungeraden Anzahl von Brücken verbunden sein.

Abstrahieren des Problems:



Graph bestehend aus Knoten (rot) und Kanten:



Aufgabenstellung jetzt: Gibt es einen Weg, der jede Kante genau einmal durchläuft, einen sogenannten *Eulerschen Weg*?

Leider nicht! Denn von jedem Knoten (jeder Landmasse) muß eine grade Anzahl von Brücken abgehen (weil ein Knoten nicht über dieselbe Brücke wieder verlassen werden darf). Nur falls Ausgangs- und Endpunkt des Spaziergangs verschieden sind, dürfen die entsprechenden Knoten mit einer ungeraden Anzahl von Brücken verbunden sein.

Damit bewies Euler (Grad meint die Anzahl der mit einem Knoten verbundenen Kanten):

Ein Graph hat genau dann einen Eulerschen Weg, wenn es nicht mehr als zwei Knoten mit ungeraden Grad gibt.

Vom Naturphänomen zum mathematischen Modell Strömungen

Vom Naturphänomen zum mathematischen Modell

Strömungen

Satelliten machen Naturschauspiele sichtbar:

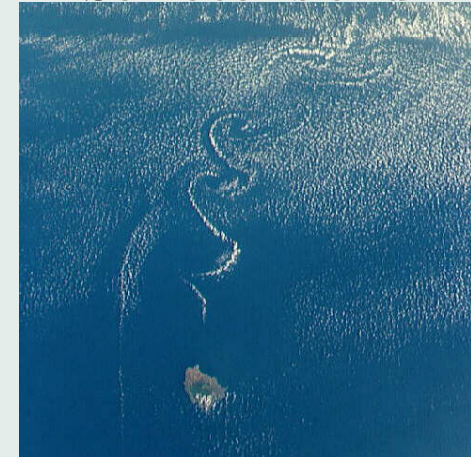
Heard Island



Kanaren



Sorroco Island



Vom Naturphänomen zum mathematischen Modell

Strömungen

Satelliten machen Naturschauspiele sichtbar:

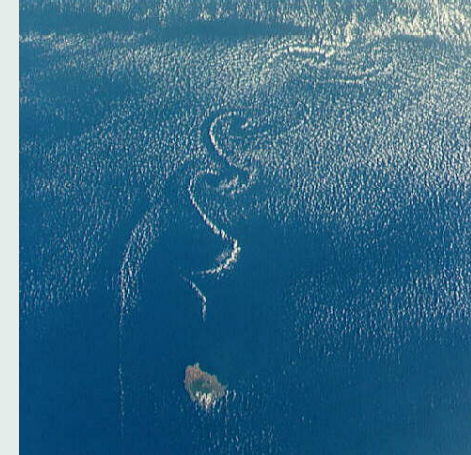
Heard Island



Kanaren



Sorroco Island



Was sehen wir? Wie können wir unsere Beobachtung beschreiben?

Vom Naturphänomen zum mathematischen Modell

Strömungen

Satelliten machen Naturschauspiele sichtbar:

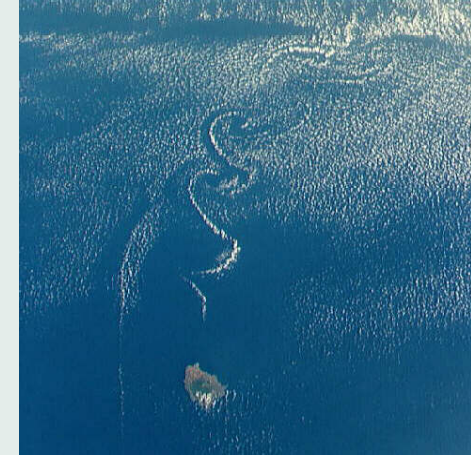
Heard Island



Kanaren



Sorroco Island



Was sehen wir? Wie können wir unsere Beobachtung beschreiben? → **Math. Modellierung.**

Vom Naturphänomen zum mathematischen Modell

Strömungen

Satelliten machen Naturschauspiele sichtbar:

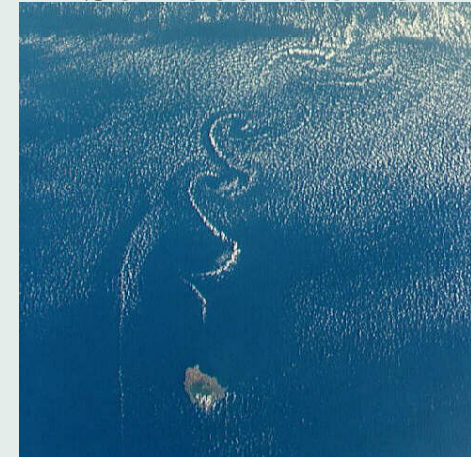
Heard Island



Kanaren



Sorroco Island



Was sehen wir? Wie können wir unsere Beobachtung beschreiben? —→ **Math. Modellierung.**
Es strömen: Flüssigkeitspartikel, denen wir eine Geschwindigkeit zuordnen ($u(t, x)$ = Geschwindigkeit zur Zeit t am Ort x).

Vom Naturphänomen zum mathematischen Modell

Strömungen

Satelliten machen Naturschauspiele sichtbar:

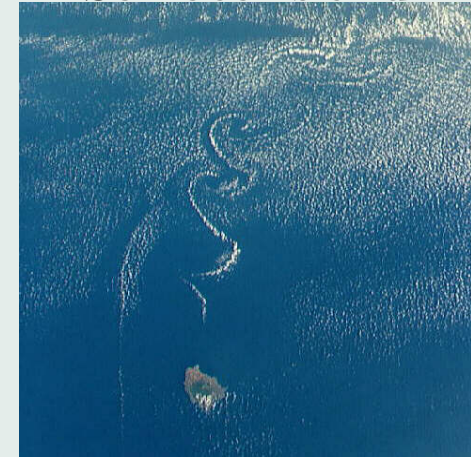
Heard Island



Kanaren



Sorroco Island



Was sehen wir? Wie können wir unsere Beobachtung beschreiben? —→ **Math. Modellierung.**
Es strömen: Flüssigkeitspartikel, denen wir eine Geschwindigkeit zuordnen ($u(t, x)$ = Geschwindigkeit zur Zeit t am Ort x).

Kontinuumsannahme:

Partikel haben keine individuelle Ausdehnung und untereinander keinen Abstand (es strömt eine Flüssigkeit).

Vom Naturphänomen zum mathematischen Modell

Strömungen

Satelliten machen Naturschauspiele sichtbar:

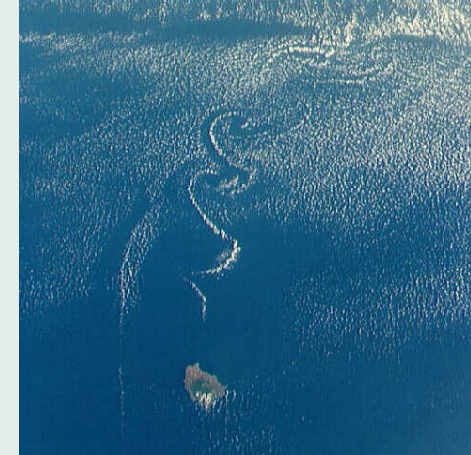
Heard Island



Kanaren



Sorroco Island



Was sehen wir? Wie können wir unsere Beobachtung beschreiben? —→ **Math. Modellierung.**
Es strömen: Flüssigkeitspartikel, denen wir eine Geschwindigkeit zuordnen ($u(t, x)$ = Geschwindigkeit zur Zeit t am Ort x).

Kontinuumsannahme:

Partikel haben keine individuelle Ausdehnung und untereinander keinen Abstand (es strömt eine Flüssigkeit).

Erhaltungsannahmen:

1. Masseerhaltung.
2. Impulserhaltung.
3. Energieerhaltung (wird hier vernachlässigt).

Vom Naturphänomen zum mathematischen Modell

Strömungen

Satelliten machen Naturschauspiele sichtbar:

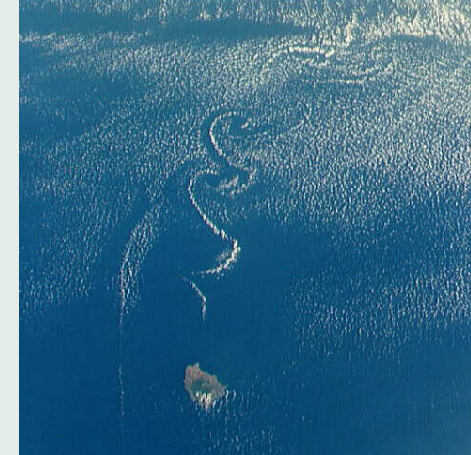
Heard Island



Kanaren



Sorroco Island



Was sehen wir? Wie können wir unsere Beobachtung beschreiben? —→ **Math. Modellierung.**
Es strömen: Flüssigkeitspartikel, denen wir eine Geschwindigkeit zuordnen ($u(t, x)$ = Geschwindigkeit zur Zeit t am Ort x).

Kontinuumsannahme:

Partikel haben keine individuelle Ausdehnung und untereinander keinen Abstand (es strömt eine Flüssigkeit).

Erhaltungsannahmen:

1. Masseerhaltung.
2. Impulserhaltung.
3. Energieerhaltung (wird hier vernachlässigt).

Materialannahme:

Die Flüssigkeit ist inkompressibel (nicht zusammendrückbar, Dichte kann sich nicht mit der Zeit ändern).

Mathematische Modellierung unter **physikalischen Annahmen** liefert (nach einiger Rechnerei)

Mathematische Modellierung unter **physikalischen Annahmen** liefert (nach einiger Rechnerei)
Mathematisches Modell für Geschwindigkeit $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))^t$ und Druck $p(t, x)$:

$$\begin{aligned}u_t(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla) u(t, x) + \nabla p(t, x) &= f(t, x) \\-\operatorname{div} u(t, x) &= 0\end{aligned}$$

Mathematische Modellierung unter **physikalischen Annahmen** liefert (nach einiger Rechnerei) **Mathematisches Modell** für Geschwindigkeit $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))^t$ und Druck $p(t, x)$:

$$\begin{aligned}u_t(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla) u(t, x) + \nabla p(t, x) &= f(t, x) \\-\operatorname{div} u(t, x) &= 0\end{aligned}$$

Das mathematische Modell ermöglicht numerische Simulation und damit (qualitative) Verifikation des Naturphänomens:



Mathematische Modellierung unter **physikalischen Annahmen** liefert (nach einiger Rechnerei) **Mathematisches Modell** für Geschwindigkeit $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))^t$ und Druck $p(t, x)$:

$$\begin{aligned}u_t(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla) u(t, x) + \nabla p(t, x) &= f(t, x) \\ -\operatorname{div} u(t, x) &= 0\end{aligned}$$

Das mathematische Modell ermöglicht numerische Simulation und damit (qualitative) Verifikation des Naturphänomens:



**Mathematisches
Modell**

↓
Numerische Simulation
des mathematischen
Modells



Mathematische Modellierung unter **physikalischen Annahmen** liefert (nach einiger Rechnerei) **Mathematisches Modell** für Geschwindigkeit $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))^t$ und Druck $p(t, x)$:

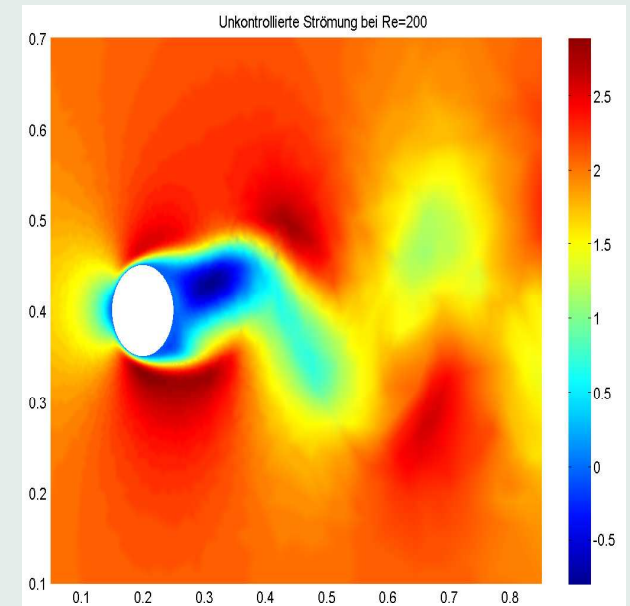
$$\begin{aligned}u_t(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla) u(t, x) + \nabla p(t, x) &= f(t, x) \\ -\operatorname{div} u(t, x) &= 0\end{aligned}$$

Das mathematische Modell ermöglicht numerische Simulation und damit (qualitative) Verifikation des Naturphänomens:



**Mathematisches
Modell**

↓
Numerische Simulation
des mathematischen
Modells



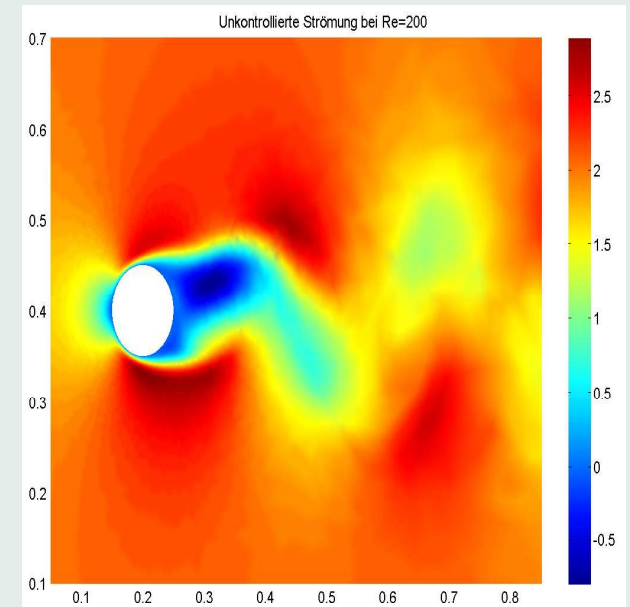
Mathematische Modellierung unter **physikalischen Annahmen** liefert (nach einiger Rechnerei) **Mathematisches Modell** für Geschwindigkeit $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))^t$ und Druck $p(t, x)$:

$$\begin{aligned}u_t(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla) u(t, x) + \nabla p(t, x) &= f(t, x) \\ -\operatorname{div} u(t, x) &= 0\end{aligned}$$

Das mathematische Modell ermöglicht numerische Simulation und damit (qualitative) Verifikation des Naturphänomens:



**Mathematisches
Modell**
↓
Numerische Simulation
des mathematischen
Modells
→



Das **mathematische Modell** beschreibt Strömungen sehr gut.
Aber:

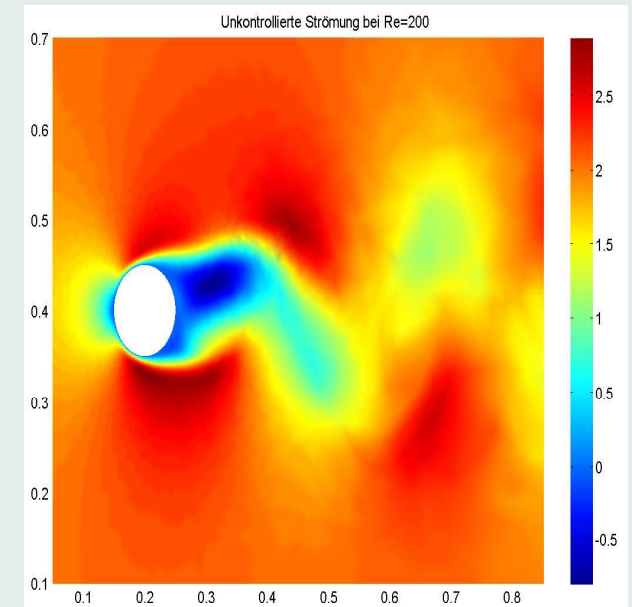
Mathematische Modellierung unter **physikalischen Annahmen** liefert (nach einiger Rechnerei) **Mathematisches Modell** für Geschwindigkeit $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))^t$ und Druck $p(t, x)$:

$$\begin{aligned}u_t(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla) u(t, x) + \nabla p(t, x) &= f(t, x) \\ -\operatorname{div} u(t, x) &= 0\end{aligned}$$

Das mathematische Modell ermöglicht numerische Simulation und damit (qualitative) Verifikation des Naturphänomens:



**Mathematisches
Modell**
↓
Numerische Simulation
des mathematischen
Modells
→



Das **mathematische Modell** beschreibt Strömungen sehr gut.

Aber: Es ist ein noch offenes Problem, ob es zu gegebenen Anfangs- und Randbedingungen auch für alle Zeiten eine Lösung besitzt.

Mathematische Modellierung unter **physikalischen Annahmen** liefert (nach einiger Rechnerei) **Mathematisches Modell** für Geschwindigkeit $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))^t$ und Druck $p(t, x)$:

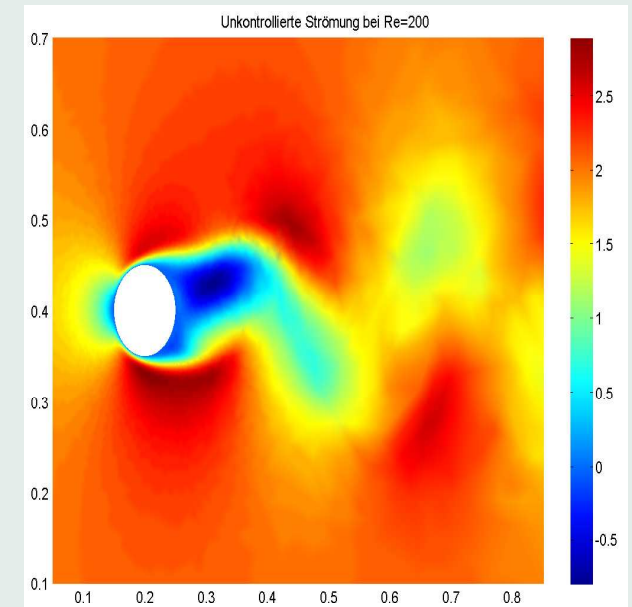
$$\begin{aligned} u_t(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla) u(t, x) + \nabla p(t, x) &= f(t, x) \\ -\operatorname{div} u(t, x) &= 0 \end{aligned}$$

Das mathematische Modell ermöglicht numerische Simulation und damit (qualitative) Verifikation des Naturphänomens:



**Mathematisches
Modell**

↓
Numerische Simulation
des mathematischen
Modells
→



Das **mathematische Modell** beschreibt Strömungen sehr gut.

Aber: Es ist ein noch offenes Problem, ob es zu gegebenen Anfangs- und Randbedingungen auch für alle Zeiten eine Lösung besitzt.

Diese Fragestellung ist eines der **7 Millenniums Preis Probleme**, für deren Lösung jeweils 1.000.000\$ Preisgeld ausgelobt sind.

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,
- ist die exakteste Sprache, die wir kennen,

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,
- ist die exakteste Sprache, die wir kennen,
- ist als Sprache Schlüsseltechnologie für Problemlösungen,

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,
- ist die exakteste Sprache, die wir kennen,
- ist als Sprache Schlüsseltechnologie für Problemlösungen,
- ist als Sprache universell,

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,
- ist die exakteste Sprache, die wir kennen,
- ist als Sprache Schlüsseltechnologie für Problemlösungen,
- ist als Sprache universell,
- bewirkt Wissenskondensation,

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,
- ist die exakteste Sprache, die wir kennen,
- ist als Sprache Schlüsseltechnologie für Problemlösungen,
- ist als Sprache universell,
- bewirkt Wissenskondensation,
- ist einfach gut

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,
- ist die exakteste Sprache, die wir kennen,
- ist als Sprache Schlüsseltechnologie für Problemlösungen,
- ist als Sprache universell,
- bewirkt Wissenskondensation,
- ist einfach gut
- und macht Sie vielleicht auch reich.

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,
- ist die exakteste Sprache, die wir kennen,
- ist als Sprache Schlüsseltechnologie für Problemlösungen,
- ist als Sprache universell,
- bewirkt Wissenskondensation,
- ist einfach gut
- und macht Sie vielleicht auch reich.

Sie sollen

- diese Sprache lernen,

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,
- ist die exakteste Sprache, die wir kennen,
- ist als Sprache Schlüsseltechnologie für Problemlösungen,
- ist als Sprache universell,
- bewirkt Wissenskondensation,
- ist einfach gut
- und macht Sie vielleicht auch reich.

Sie sollen

- diese Sprache lernen,
- in ihr Probleme formulieren,

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,
- ist die exakteste Sprache, die wir kennen,
- ist als Sprache Schlüsseltechnologie für Problemlösungen,
- ist als Sprache universell,
- bewirkt Wissenskondensation,
- ist einfach gut
- und macht Sie vielleicht auch reich.

Sie sollen

- diese Sprache lernen,
- in ihr Probleme formulieren,
- in ihrem Formalismus Lösungsvorschläge bereitstellen,

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,
- ist die exakteste Sprache, die wir kennen,
- ist als Sprache Schlüsseltechnologie für Problemlösungen,
- ist als Sprache universell,
- bewirkt Wissenskondensation,
- ist einfach gut
- und macht Sie vielleicht auch reich.

Sie sollen

- diese Sprache lernen,
- in ihr Probleme formulieren,
- in ihrem Formalismus Lösungsvorschläge bereitstellen,
- mit ihrer Hilfe Fortschritt ermöglichen.

Mathematik

- ist eine (schwere) Sprache,
- ist die exakteste Sprache, die wir kennen,
- ist als Sprache Schlüsseltechnologie für Problemlösungen,
- ist als Sprache universell,
- bewirkt Wissenskondensation,
- ist einfach gut
- und macht Sie vielleicht auch reich.

Sie sollen

- diese Sprache lernen,
- in ihr Probleme formulieren,
- in ihrem Formalismus Lösungsvorschläge bereitstellen,
- mit ihrer Hilfe Fortschritt ermöglichen.

Dabei wünschen wir Ihnen gutes Gelingen und viel Erfolg