Teilprojekt C3

Leitung: Prof. Dr. M. Hinze[a]

Entwicklung von Feedback-Controllern zur Beeinflussung abgelöster Strömungen

Bearbeiter: Dipl.-Ing. K. Afanasiev[a]

[a]Fachbereich Mathematik

AG Funktionalanalysis und Numerik

3.1 Ausgangsfragestellung und Kenntnisstand bei der letzten Antragstellung

3.1.1 Ausgangsfragestellung und Ziele

Im Mittelpunkt der ersten Projektphase stand die Entwicklung von Kontrollmethoden für Strömungen anhand zweidimensionaler Modellprobleme. Die Zielstellung umfaßte dabei aus der Sicht des Wissenschaftlichen Rechnens die

- Implementierung optimaler Kontrollen (optimaler Steuerungen),
- Entwicklung modellprädiktiver Verfahren,
- Entwicklung suboptimaler Methoden mittels Modellreduktion,

sowie den numerischen Vergleich der verschiedenen Zugänge hinsichtlich des Wirkungsgrads. Aus der Sicht der Numerischen Mathematik stand die mathematische Analyse obengenannten Methoden im Vordergrund.

Kontrollmöglichkeiten mittels RANS wurden wegen der personellen Ausstattung nicht weiter verfolgt. Beiträge zu diesem Bereich liefern Chang und Collis in [5].

3.1.2 Kenntnisstand bei der letzten Antragstellung

Bei Antragstellung waren die einschlägigen mathematischen und ingenieurwissenschaftlichen Arbeiten im Bereich der Kontrollen von Strömungen bekannt. Aus mathematischer Sicht sind hier die Arbeitsgruppe um Gunzburger in Iowa [8] und um Glowinski in Houston [7] zu nennen. Aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht ist die Gruppe um Moin in Stanford zu nennen. Insbesondere werden dort viele Ergebnisse durch interdisziplinäre Zusammenarbeit mit Mathematikern wie Temam aus Paris Sud/Indiana erzielt [27].

Die eigenen Vorarbeiten umfaßten die numerische Implementierung suboptimaler Kontrollstrategien für laminare Strömungen, insbesondere instantaner Kontrolle [18, 19, 20] und Kontrolle mittels Modellreduktion über die Reduced Basis Methode [16]. Als Beispielkonfiguration diente dabei die zweidimensionale rückwärtige Stufe, wobei die Strömung mit den zweidimensionalen instationären Navier-Stokes Gleichungen modelliert wurde. Die numerischen Simulationen wurden mit einer Erweiterung des Finite Element Lösers von Bänsch [3] durchgeführt.

3.2 Entwickelte und angewandte Methoden

Ausgangspunkt der Arbeiten des Teilprojekts waren die instationären Navier-Stokes Gleichungen als Modell für Strömungen inkompressibler Fluide. Für dieses Modell wurden Fragestellungen zur Optimalsteuerung, Modell-Prädiktiver Kontrolle und zur Kontrolle mittels Modellreduktion untersucht und numerische Algorithmen implementiert. Der Schwerpunkt der Arbeiten von Konstantin Afanasiev liegt im Bereich der Kontrolle mittels Modellreduktion. Daher werden die dort erzielten Resultate an einem Beispiel ausführlich diskutiert. Ergebnisse in den Bereichen Optimalsteuerung und Modell-Prädiktiver Kontrolle der Navier-Stokes Gleichungen werden nur skizziert. Details zu den nachfolgenden Ausführungen können den Arbeiten [2, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 16, 21, 22, 23] entnommen werden.

3.2.1 Optimalsteuerung

Optimalsteuerprobleme für die instationären Navier-Stokes Gleichungen in primitiven Variablen mit verteilten Kontrollen werden wie folgt formuliert;

$$(P) \begin{cases} \min J(y,u), \quad (y,u) \in W \times U =: X \\ \text{s.t.} \\ \begin{array}{rcll} y_t - \nu\Delta y + (y\cdot\nabla)y + \nabla p &=& Bu & \text{auf } \Omega^T \\ -\text{div}\, y &=& 0 & \text{auf } \Omega^T \\ y(t,.) &=& 0 & \text{auf } (\partial\Omega)^T \\ y(0,.) &=& y_0 & \text{auf } \Omega. \end{array} \end{cases}$$

Dabei bezeichnen U den Hilbertraum der Kontrollen, $W := \{v \in L^2(V), v_t \in L^2(V^*)\}$ den Zustandsraum, wobei $V := \{v \in C_0^\infty(\Omega); \text{div}\, v = 0\}^{-\|\cdot\|_{H^1}}$ und $B \in L(U, L^2(V^*))$ den Kontrolloperator. Die Anfangswerte y_0 werden in $H := \{v \in C_0^\infty(\Omega), \text{div}\, v = 0\}^{-\|\cdot\|_{L^2}}$ gewählt. Mit Hilfe des Operators $e : X \to Z^*$, $X := W \times U$,

$$e(x) = (e^1(x), e^2(x)) = (y_t - \nu\delta y + b(y, \nabla y) - Bu, y(0) - y_0)$$

wird die hier betrachtete variationelle Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen als

$$e(x) = 0 \quad \text{in} \quad Z^*$$

geschrieben, wobei $Z := L^2(V) \times H$, $\Delta y := P\Delta y$ und $b(y, \nabla y) := P[(y\nabla)y]$ mit dem Leray Projektor P. Hier ist $L^2(V)$ eine abkürzende Schreibweise für $L^2(0,T;V)$, $L^2(V^*)$ analog.

Im Folgenden wird das Problem (P) in seiner allgemeinsten Form

$$(P)' \begin{cases} \min J(\mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{x} \in \mathbf{X} \\ \text{s.t. } \mathbf{e}(\mathbf{x}) = 0 \text{ in } \mathbf{Z}^* \end{cases} \tag{1}$$

betrachtet und dabei angenommen, daß das Funktional J in dedr Form

$$J(x) = J_1(y) + J_2(u)$$

separiert werden kann und daß es zweimal Frechét differenzierbar mit Lipschitz-stetigen zweiten Ableitungen ist. Diese Zerlegung ist in praktischen Anwendungen i.d.R. gegeben.

Das Problem (P)$'$ ist von Hinze und Kunisch in [22] ausführlich als restringiertes Optimierungsproblem untersucht worden. Die dort erzielten Resultate sind vom Antragsteller in [9] verallgemeinert worden. Neben anderen Dingen wurde dort für Problem (P)$'$

- Existenz von Lösungen des Optimalsteuerproblems
- Existenz und Eindeutigkeit von Lagrangemultiplikatoren und
- lokale Konvergenz mit optimalen Raten der Basisalgorithmen aller gängigen Verfahren mit Ableitungsinformation zweiter Ordnung (Newton, BFGS, SQP, Reduced SQP, BFGS-SQP)

bewiesen. Desweiteren wurde das SQP-Verfahren als Vertreter der All-at-once Methode mit dem Newton-Verfahren als Black-box Methode zur Minimierung von $\bar{J}(u) = J(y(u), u)$ numerisch verglichen [10]. Weitere numerische Testrechnungen finden sich in [9, 11, 17, 21, 22].

Die analytische Behandlung von Randkontrollproblemen (mit Kunisch) und die numerische Analysis von Finite-Element Diskretisierungen von Problem (P) (mit Deckelnick) ist im Gange.

Die numerische Berechnung von Optimalsteuerungen für praktische dreidimensionale Strömungen ist mit momentan zur Verfügung stehenden Rechnerresourcen nicht möglich und wird wohl auch in absehbarer Zukunft nicht mit vertretbaren Aufwand zu bewerkstelligen sein. Eine Möglichkeit, trotzdem brauchbare Kontrolle mit vertretbaren Aufwand zu berechnen, bieten suboptimale Kontrollmethoden. In der ersten Projektphase wurden zwei verschiedene solche Zugänge untersucht.

3.2.2 Modell-Prädiktive Verfahren, Instantane Kontrolle

Modell-Prädiktive Verfahren berechnen optimale Kontrollen über kurze Zeithorizonte und tasten den zu betrachtenden großen Zeithorizont gleichzeitig ab [6, 9, 12, 13, 14, 17, 16, 23]. Einen geeignetes Analogon bietet hier das Schachspiel [4]: Berechne die nächsten optimalen Züge, spiele den ersten und wiederhole die Prozedur. Das entspricht einer Reduktion der zeitlichen Kontrollvariablen. Einen Schwerpunkt der Untersuchungen in diesem Teilprojekt stellt die Instantane Kontrollmethode dar. In Termen der Schach Analogie ist diese am besten mit Blitz Schach zu vergleichen: Spiele (schnell) eine möglichst gute Näherung des nächsten optimalen Zuges. Praktisch werden dazu die instationären Navier-Stokes Gleichungen bezüglich der Zeit diskretisiert und in jedem Zeitschritt ein geeignetes Optimierungsproblem formuliert, welches sodann näherungsweise durch Anwendung genau eines Gradientenschritts gelöst wird. Mit der so berechneten Kontrolle wird das System bis zum nächsten Zeitpunkt gesteuert.

Instantane Kontrolle für die instationären Navier-Stokes Gleichungen wird vom Antragsteller sowohl analytisch untersucht als auch numerisch für zahlreiche Beispielkonfigurationen implementiert. So konnte bisher nachgewiesen werden [9], daß es mit verteilter instantaner Kontrolle möglich ist, jeden Zustand ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand exponentiell schnell anzufahren. Numerische Testrechnungen belegen dieses analytische Resultat, siehe auch [23]. Diese Kontrollmethode kann darüber hinaus als Regler interpretiert werden, der auf der Basis von meßbaren Größen Kontrollen berechnet [6]. Durch Variation des zugrundeliegenden Zeitintegrationsverfahrens kann die Methode beliebig variiert werden. Die optimale Wahl der Schrittlänge im Gradientenschritt macht das Verfahren sehr effizient, vergleiche auch die Arbeiten von TP A6.

Eine mit Hilfe der instantanen Kontrollmethode berechnete Folge von Kontrollen kann auch als zeitdiskrete Steuerung aufgefaßt werden. Verglichen mit der Optimalsteuerungen sind instantane Steuerungen natürlich in der Gesamtbilanz teurer. Der hohe Kostenbeitrag resultiert dabei von den Kontrollen. Das eigentliche Kontrollziel wird allerdings i.d.R. wesentlich besser erfaßt als bei Optimalsteuerungen. Instantane Kontrollen können aber in vielen Anwendungsfällen in Echtzeit numerisch berechnet werden, siehe etwa [29], wohingegen die Berechnung von Optimalsteuerungen numerisch sehr zeitaufwendig ist. Wann immer Kontrollen billig sind, stellt diese Methode demnach eine sehr schnelle Alternative zur Optimalsteuerung dar.

Als zweite Möglichkeit wird Kontrolle mittels Modellreduktion untersucht [2, 17, 16]. Die Reduktion des Modells findet dabei in den örtlichen Variablen statt. Für das reduzierte Modell wird eine Optimalsteuerung berechnet, welche dann zur suboptimalen Kontrolle des Ausgangsproblems verwendet wird. Dieser Zugang wird im Folgenden ausführlicher dargestellt.

3.2.3 Optimierung mittels Modellreduktion

Die Idee bei diesem Zugang besteht darin, die Navier-Stokes Gleichungen in Problem (P) durch ein niedrigdimensionales dynamisches System zu ersetzen um anschließend das modifizierte Optimalsteuerproblem zu lösen. Zur Modellreduktion werden die Navier-Stokes Gleichungen durch Galerkin Projektion auf orthonormierte Moden projiziert, welche mittels der 'snapshot' Form der Eigenmodenanalyse nach Sirovich [26] aus Ensemblen von Schnappschüssen von Strömungen über die Zeit genommen worden. Zur detailierten Beschreibung dieses Zuganges bezeichne $\{y_1, ...y_n\}$ ein Ensemble von Schnappschüssen zu den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$ und $\{\phi_1, ...\phi_m\}$ die dazugehörigen kohärenten Strukturen oder Moden im Raum

$$\{y_1 - \bar{y}, ...y_n - \bar{y}\}$$

der Abweichungen vom Mittelwert

$$\bar{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Die Strömung wird jetzt gemäß

$$y(t, x) = \bar{y} + \sum_i a_i(t)\phi_i(x) \tag{2}$$

angesetzt und die Navier-Stokes Gleichungen auf den Raum H_m :=span$\{\phi_1, ..., \phi_m\}$ projiziert. Es ergibt sich ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen der

Gestalt

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_k}{\partial t} &+ \sum_i a_i(((\bar{y}\nabla)\phi_i + (\phi_i\nabla)\bar{y}), \phi_k) + \\ &+ \sum_i\sum_j a_i a_j((\phi_i\nabla)\phi_j, \phi_k) + ((\bar{y}\nabla)\bar{y}, \phi_k) = \\ &= \underbrace{-(\nabla p, \phi_k)}_{=0} + \nu\sum_i a_i(\triangle\phi_i, \phi_k) + \nu(\triangle\bar{y}, \phi_k),\end{aligned} \tag{3}$$

kurz

$$\dot{a} + La + F(a) + g = 0 \qquad \text{mit} \qquad (F(a))_k = a^T H_k a, \tag{4}$$

wobei

$$\begin{array}{llrcl} g \in \mathbb{R}^n & \text{mit} & \gamma_i & = & \nu\langle\nabla\bar{y}, \nabla\phi_i\rangle + \langle\bar{y}\nabla\bar{y}, \phi_i\rangle \\ L \in \mathbb{R}^{n\times n} & \text{mit} & L_{ij} & = & \nu\langle\nabla\phi_j, \nabla\phi_i\rangle + \langle\bar{y}\nabla\phi_j + \phi_j\nabla\bar{y}, \phi_i\rangle \\ H \in \mathbb{R}^{n\times n\times n}, H_k \in \mathbb{R}^{n\times n} & \text{mit} & H_{ij,k} & = & \langle\phi_i\nabla\phi_j, \phi_k\rangle. \end{array} \tag{5}$$

Bevor das dynamische System in der Optimierung Verwendung finden konnte, mußte es gegen die Navier-Stokes Gleichungen validiert werden. Als Beispielkonfiguration diente dabei der umströmte Zylinder in zwei Raumdimensionen mit $1/\nu$ = Re=100. Insbesondere stellte sich dabei heraus, daß Moden immer paarweise auftreten und das System (5) schon für 8 Moden (d.h. m=8) die Dynamik des vollen Navier-Stokes Systems hinreichend genau wiederspiegeln. Wesentlich dafür war allerdings, daß mit den Schnappschüssen ein Vielfaches der Periode der Strömung abgetastet wurde. Weitere Details dazu sind im vollständigen Ergebnisbericht [1] zu finden. Im nächsten Schritt ist der Kontrollraum festzulegen. Wird etwa in (P)

$$u(x,t) = \sum_i b_i(t)\phi_i(x) \tag{6}$$

gesetzt, so ergibt sich mit (5) das reduzierte Kontrollproblem

$$\begin{array}{ll} \min & J(a,b), \quad a,b \in \mathbb{R}^m \\ \text{s.t.} & \dot{a} + La + F(a) + \gamma = \Phi_c b, \quad a(0) = a_0, \end{array} \tag{7}$$

welches dann etwa mit Hilfe eines augmentierten Lagrange-SQP-Verfahrens numerisch gelöst werden kann. Die so für den umströmten Zylinder im Fall von Tracking-type Funktionalen gewonnenen Kontrollen sind verblüffend gut. Der numerische Aufwand dabei besteht im wesentlichen in der Berechnung der Schnappschüsse, wozu nur ein Vorwärtslöser für die Navier-Stokes Gleichungen zur Verfügung stehen muß. Der Zeitaufwand für die numerische Simulation des vollen Systems liegt hier je nach örtlicher Auflösung für die Strömung im Bereich von Stunden. Die Lösung des vollen Optimalsteuerproblems hingegen nimmt mehrere Tage in Anspruch.

In einem nächsten Schritt haben wir obengenannte Technik iterativ unter Einbeziehung kontrollierter Schnappschüsse verfeinert und konnten die berechneten suboptimalen Kontrollen noch wesentlich verbessern [2]. Der Erfolg dieses iterativen Vorgehens, nachfolgend **ISO** (**I**terated **S**ubspace **O**ptimization) genannt, hängt wesentlich von der adaptiven Generierung der Modenbasis ab, Details dazu sind in [1] zu finden.

3.3 Ergebnisse und ihre Bedeutung

3.3.1 Strömungskonfigurationen und Parameter der Untersuchung

Das Verfahren **ISO** wurde zur Berechnung suboptimaler verteilter Kontrollen eines umströmten Kreiszylinders verwendet. Dabei wurden als Strömungskonfigurationen sowohl die offene Kreiszylinderumströmung (OKZU), als auch die (in einem Kanal) geschlossene Kreiszylinderumströmung (GKZU) betrachtet.

Als örtliches Rechengebiet für die offene Strömung wurde das Rechteck $\Omega = [-5, 15] \times [-5, 5]$ gewählt und mit 15838 Knoten diskretisiert (siehe Abb. 1). Für die geschlosse-

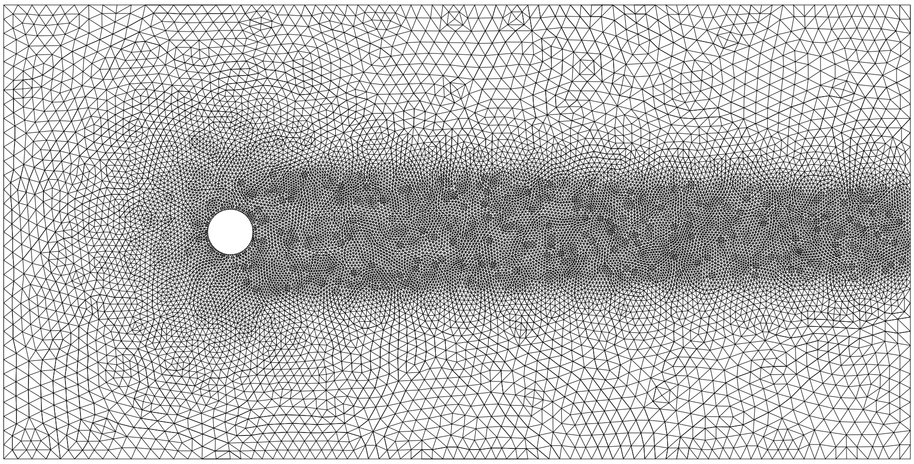

Abbildung 1: Rechengitter zur offenen Kreiszylinderumströmung (15838 Gitterknoten).

ne Strömung wurde ein Gitter mit 16000 Knoten für das örtliche Rechengebiet $\Omega = [0, 19.5] \times [-2, 2.1]$ verwendet. Diese Konfiguration ist an den Benchmark in [25] angelehnt. Für die numerischen Beispiele wurde das Kostenfunktional

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega_o} \|y - y_d\|^2 \, dx dt + \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\Omega_c} \|u\|^2 \, dx dt$$

gewählt, wobei der zu rekonstruierende Zustand y_d als Mittelwert der unkontrollierten Snapshots gewählt wurde.

Bei der verteilten Kontrolle einer Strömung wird der Eingriff mit Volumenkräften unmittelbar im Strömungsgebiet vorgenommen. Obwohl Eingriffe mit verteilten Kontrollen im Bereich der Aerodynamik praktisch nicht durchführbar sind, eröffnen sie eine Vorstellung, was mittels aktiver Kontrolle bei dem zu untersuchenden System überhaupt erreicht werden kann. Desweiteren findet verteilte Kontrolle überall dort Anwendung, wo die Strömung mittels magnetohydrodynamischen Gleichungen beschrieben werden kann, wie etwa bei Salzwasser. Desweiteren können Erkenntnisse über das Verhalten der Strömung unter derartigen Beeinflussungen Aufschluß über die Empfindlichkeit und Steuerbarkeit der Strömung geben. Aus theoretischer Sicht sind auch Fragestellungen zu Aktuatoren-und Sensorplatzierung von großem Interesse. Schließlich kann verteilte Kontrolle in randnahen Zonen als Näherung zur praxisrelevanten Randkontrolle betrachtet werden.

Die Beobachtung und die Beeinflussung einer Strömung kann in der Praxis nur in wenigen ausgewählten Punkten des Strömungsgebietes erfolgen. Daher wird ferner angenommen, daß die Messungen in einem begrenzten Beobachtungsgebiet Ω_o und Beeinflussungen in einem Kontrollgebiet Ω_c durchgeführt werden können.

Der Zeithorizont der Optimierung wurde in allen Berechnungen als eine Periode T der Wirbelstraße gewählt, wobei $T = 3.4$ bei GKZU und $T = 5.8$ OKZU. Nachfolgend werden die mittels **ISO** erhaltenen Ergebnisse mit denen durch die Optimalsteuerung des vollen Systems erhaltenen verglichen. Zur numerischen Berechnung der Optimalsteuerungen für das volle System wurde das Newton-Verfahren verwendet, wobei als Initialisierungsroutine das Gradientenverfahren mit Schrittweitensteuerung verwendet wurde.

	Methode	Re	τ	T	Ω_o	Ω_c	γ
1	NM	100.	0.0116	5.8	Ω	Ω	0.1
3	ISO	100.	0.0116	5.8	Ω	Ω	0.1
4	NM	100.	0.0116	5.8	Ω	$[2.2.5] \times [-0.1, 0.1]$	1.0
5	ISO	100.	0.0116	5.8	Ω	$[2.2.5] \times [-0.1, 0.1]$	1.0
6	ISO	100.	0.0116	5.8	Ω	$[2.2.5] \times [-0.1, 0.1]$	0.91
7	ISO	100.	0.0116	5.8	Ω	$[2.2.5] \times [-0.1, 0.1]$	10.0
8	ISO	100.	0.0116	5.8	Ω	$[1.1.5] \times [-0.1, 0.1]$	1.0
9	ISO	100.	0.0116	5.8	Ω	$[3, 3.5] \times [-0.1, 0.1]$	1.0

Tabelle 1: Parameter der Berechnungen zur offenen Kreiszylinderumströmung.

	Methode	Re	τ	T	Ω_o	Ω_c	γ
1	GM+NM	100.	0.0068	3.4	Ω	Ω	0.2
2	ISO	100.	0.0068	3.4	Ω	Ω	0.2
3	ISO	100.	0.0068	3.4	$[4, 6] \times [-1, 1]$	$[4, 6] \times [-1, 1]$	0.2
4	ISO	100.	0.0068	3.4	$[4, 6] \times [-1, 1]$	$[2, 3] \times [-1, 1]$	0.2

Tabelle 2: Parameter der Berechnungen zur geschlossenen Kreiszylinderumströmung.

Als Konvergenzkriterium wurde

$$\frac{|J_{i+1} - J_i|}{|J_i|} < \varepsilon \tag{8}$$

gewählt, wobei J_i den Wert des Kostenfunktionals nach der i-ten Iteration des verwendeten Verfahren bezeichnet. Die bei den Berechnungen verwendeten Parameter für die offene Strömung finden sich in Tab. 1, die für die geschlossene in Tab. 2.

Nachfolgend werden exemplarisch Ergebnisse für die Kontrolle der offenen Kreiszylinderumströmung diskutiert. Eine vollständige Beschreibung und Diskussion aller numerischen Ergebnisse findet sich in [1]. Alle präsentierten Berechnungen wurden auf einer Workstation *Origin 200* ausgestattet mit *MIPS R10000* Prozessoren durchgeführt.

3.3.2 Konvergenzverhalten von ISO

In Abb. 2 ist die Berechnung der Kontrolle mittels **ISO** für den Fall $\Omega_c = \Omega_o = \Omega$, $\gamma = 0.1$, $\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$ illustriert, wobei als Zielzustand der zeitliche Mittelwert der un kontrollierten instationären Strömung gewählt wurde. Es ist deutlich zu erkennen, daß das Kostenfunktional nach drei Iterationen optisch stationär ist. Nach insgesamt sieben Iterationen von **ISO** ist das Konvergenzkriterium (8) erfüllt. Die Optimierung in der ersten

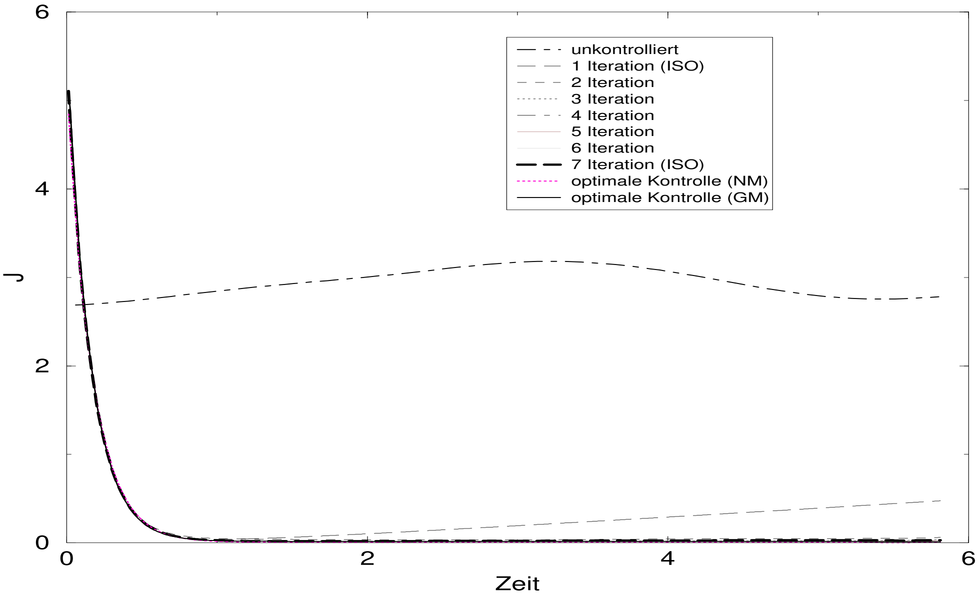

Abbildung 2: Zeitliche Entwicklung der im Fall $\Omega_c = \Omega_o = \Omega$. $\gamma = 0.1$.

Iteration wird mit den aus unkontrollierten Snapshots erhaltenen Moden durchgeführt und ergab für dieses Beispiel bereits eine Kostenreduktion von 89.4 % relativ zum optimal kontrollierten Gesamtsystem (=100% Reduktion). Sechs weitere Iterationen verbesserten diesen Wert auf 94.43 %.

Entscheidend aber ist, daß für **ISO** in diesem Fall die instationären Navier-Stokes Gleichungen nur sieben Mal mit variierenden Kontrollen vorwärts gelöst werden mußten, und zusammen mit der niedrigdimensionalen Optimierung 7.3 h CPU verbraucht wurden. Das Newton-Verfahren für die Berechnung der Optimalsteuerung des vollen Systems benötigte dagegen ca. 206.1 h CPU.

An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, daß zur Durchführung von **ISO** lediglich ein Vorwärtslöser zur numerischen Berechnung der Snapshots benötigt wird, die aufwendige Diskretisierung eines vollen adjungierten Systems entfällt.

Die Berechnung der Eigenwerte der Korrelationsmatrix und die niedrigdimensionale Optimierung kann z.B. unter MATLAB realisiert werden.

3.3.3 Physikalische Interpretation der Kontrolle

Phasen der Kontrolle. Bei der qualitativen Untersuchung der Kontrolle lassen sich zwei Phasen unterscheiden (Abb. 3). In der ersten transienten Phase der Beeinflussung[1] findet

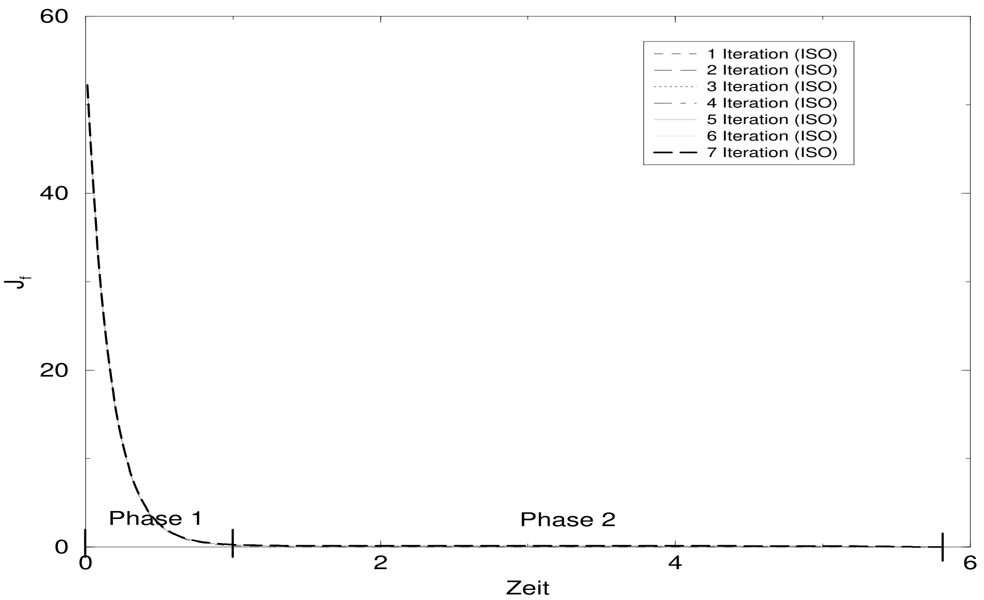

Abbildung 3: Zeitliche Entwicklung der Kontrollkosten für die einzelnen Iterationen im Fall $\Omega_c = \Omega_o = \Omega, \gamma = 0.1$.

sehr intensive Unterdrückung der Abweichung der Lösung von dem gewünschten Zielzustand y_d durch die gezielte Anwendung einer starken Volumenkraft statt. Die Kontrollkosten sind in dieser Phase deutlich größer als in der zweiten Phase[2], in welcher die Kontrollen lediglich den Rückzug von dem gewünschten Zielzustand zu verhindern haben.

Zusammenhang zwischen Messung und Wirkung. Im betrachteten Fall wird davon ausgegangen, daß die Strömung im Beobachtungsgebiet Ω_o beobachtet werden kann und somit die Abweichung $d := y - y_d$ dort bekannt ist. Auf der Grundlage dieser Information im Beobachtungsgebiet wird dann die Kontrolle berechnet.

Die Funktion d dient als Indikator für die Güte der berechneten Kontrollen u: *Je größer der Betrag der Funktion $d(x,t)$ ist, desto stärker muß die Strömung beeinflußt werden, um den gewünschten Zustand y_d zu erreichen.*

Um die Zusammenhänge zwischen den Funktionen $d(x,t)$ und $y(x,t)$ zu klären, werden sowohl die Momentanaufnahmen als auch die POD-Moden beider Funktionen analysiert und miteinander verglichen. Dazu betrachten wir zunächst die Amplituden der POD-Moden der unbeeinflußten Strömung relativ zur optimal kontrollierten Strömung $y_c(x,t)$. Wie Abb. 4 verdeutlicht, werden die Moden der unkontrollierten Strömung durch die Beeinflussung stark gedämpft. Gleiches gilt auch für die Moden, die während der Iterationen von **ISO** neu erzeugt werden, wie in Abb. 5 für die aus der letzten Iteration von **ISO** erzeugten Moden dargestellt ist. Als nächstes werden die POD-Zerlegungen der Funktionen $d(x,t)$ und $u(x,t)$ analysiert. Tab. 3 zeigt neben den Eigenwerten der Korrelationsmatri-

[1] Bei der optimalen Kontrolle der offenen Kreiszylinderumströmung mit verteilten Kontrollen im ganzen Gebiet kann die transiente Phase dem Zeitintervall $t \in [0, 1.0]$ zugewiesen werden.

[2] Die zweite Kontrollphase kann im Zeitintervall $t \in [1.0, 5.8]$ beobachtet werden.

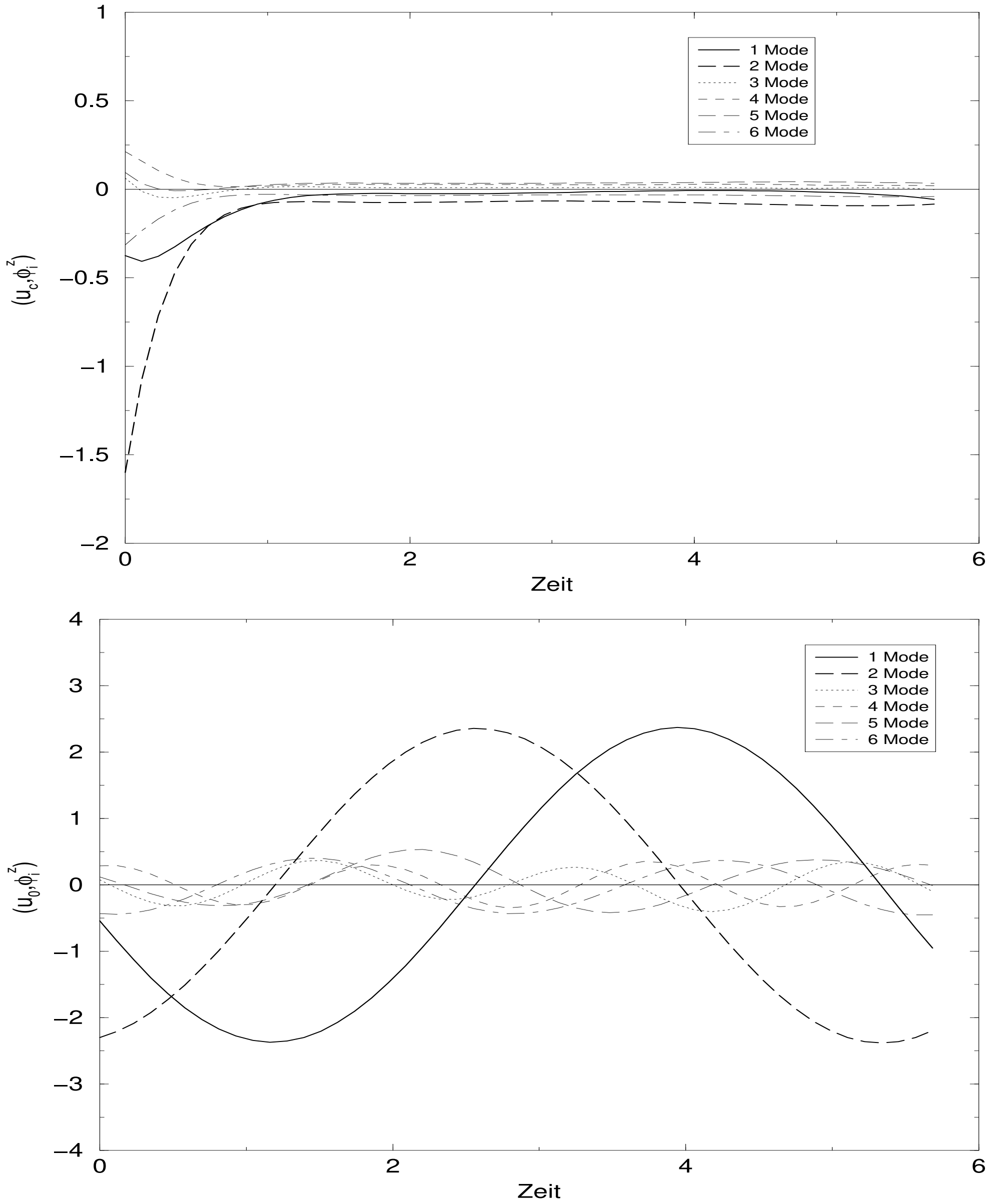

Abbildung 4: Projektionen der unkontrollierten Strömung $y_0(x,t)$ (oben) und der optimal kontrollierten Strömung $y_c(x,t)$ auf die POD-Moden der Funktion $d_0(x,t) = y_0(x,t) - y_d(x)$.

zen auch die Energiebeiträge

$$s_n = \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \quad \text{und} \quad S_n = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i}$$

der entsprechenden POD-Moden. Es wird deutlich, daß sowohl d als auch u eine niedrigdimensionale Beschreibung erlauben. Am besten lässt sich das anhand der Karhunen-Loéve Dimension

$$d_{kl}(e) := n + \alpha, \quad (n,\alpha) = \underset{n<N,\alpha\in[0,1]}{\arg\min} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i + \alpha * \lambda_{n+1}}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \geq e, \tag{9}$$

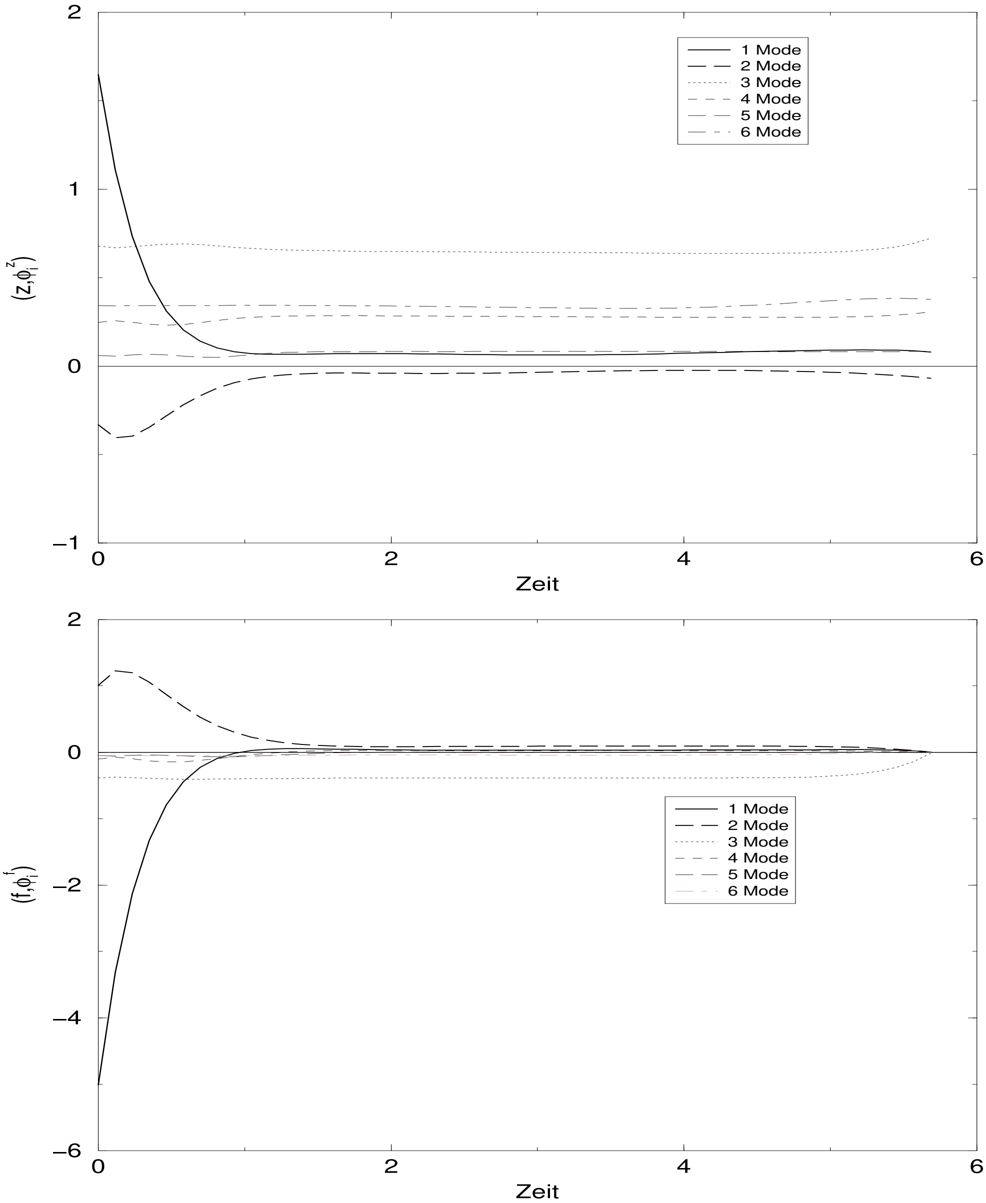

Abbildung 5: Projektionen des Zustandes $d_c(x,t) = y_c(x,t) - y_d$ (oben) und der Kontrolle $u(x,t)$ auf ihre POD-Moden.

der jeweiligen Funktion verdeutlichen, welche ein Maß für den Informationsgehalt der ersten $n+1$ Moden relativ zu Gesamtinformation darstellt, welche hier durch die Gesamtenergie der Trajektorie

$$e = \frac{1}{2} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |y(x,t)|^2 dx dt.$$

gegeben ist. Für $e = 99.9$ % ergibt sich aus Tab. 3 etwa $d_{KL} = 6.78$ für d_c, $d_{KL} = 3.55$ für u. Abb. 6 zeigt den Vergleich der Stromlinien des ersten Kontrollmodes mit denen des ersten Modes von d_c. Es wird deutlich, daß die beiden Moden fast gleiche Topologie

	Differenz: $d_c(x,t)$			Kontrolle: $u(x,t)$		
n	λ_n	s_n (%)	S_n (%)	λ_n	s_n (%)	S_n (%)
1	4025.06439	95.3277	95.3277	40170.29988	95.7746	95.7746
2	165.90754	3.9293	99.2570	1485.16233	3.5409	99.3155
3	13.98973	0.3313	99.5883	220.67054	0.5261	99.8417
4	7.36424	0.1744	99.7628	48.83312	0.1164	99.9581
5	2.91751	0.0691	99.8319	8.86272	0.0211	99.9792
6	2.15462	0.0510	99.8829	4.62769	0.0110	99.9903
7	1.34980	0.0320	99.9149	1.10099	0.0026	99.9929
8	1.20897	0.0286	99.9435	0.88070	0.0021	99.9950
9	0.62821	0.0149	99.9584	0.67104	0.0016	99.9966
10	0.50659	0.0120	99.9704	0.37140	0.0009	99.9975
11	0.39769	0.0094	99.9798	0.29434	0.0007	99.9982
12	0.32804	0.0078	99.9875	0.25038	0.0006	99.9988
13	0.15610	0.0037	99.9912	0.19346	0.0005	99.9992

Tabelle 3: Eigenwerte der POD-Zerlegung der Funktion $d_c(x,t)$ und der Kontrollfunktion $u(x,t)$.

bei entgegengesetzter Orientierung haben, die Kontrolle also dem Zustand entgegenwirkt. Dieses Resultat ist im Einklang mit Untersuchungen zu *Opposition Control* [24], wobei hier zusätzlich Aussagen über die beste Strategie der Kontrolle gemacht werden können.

Weitere Untersuchungen zu diesem Fragenkreis, insbesondere auch mit anderen Kontroll- und Beobachtungsbereichen, finden sich im Report [1].

Bedeutung der Ergebnisse

a) generell

Optimalsteuerungen für komplexe Strömungen können mit den heute zur Verfügung stehenden Rechnerresourcen nur mit großem Zeitaufwand numerisch berechnet werden [4, 5, 28]. Um dennoch Steuerungen und Regelungen für komplexe Strömungsvorgänge mit vertretbarem numerischen Aufwand bereitstellen zu können, wurden am Beispiel der Umströmung des Kreiszylinders in zwei Raumdimensionen Modell-Prädiktive Verfahren und Methoden der Modellreduktion untersucht und in ihren Wirkungsweisen miteinander und mit der jeweiligen Optimalsteuerung verglichen. Als Strömungskonfiguration wurde der Kreiszylinder in zwei Raumdimensionen gewählt, weil dessen Umströmung zum einen physikalisch ausreichend komplex ist und zum anderen die numerische Simulation der Konfiguration mit verfügbaren Rechnerresourcen in vertretbarer Zeit durchgeführt werden kann. Optimalsteuerungen dienen dabei momentan zur Quantifizierung suboptimaler Kontrollstrategien. Die von uns für die analytische Untersuchung von Optimalsteuerproblemen angewendeten Methoden [9] können leicht für andere mathematische Fragestellungen modifiziert werden.

Modell-Prädiktive Verfahren, instantane Kontrolle spielen im Bereich der Strömungskontrolle gerade wegen ihrer regelungstechnischen Interpretation beim Entwurf geschlossener Regelkreise eine wichtige Rolle. Auf der Grundlage von Messungen können diese Methoden je nach Art der Implementierung in Echtzeit Kontrollen für das zu steuernde System bereitstellen. Mittelfristig wird diese Kontrollmethode aus der Sicht der Anwen-

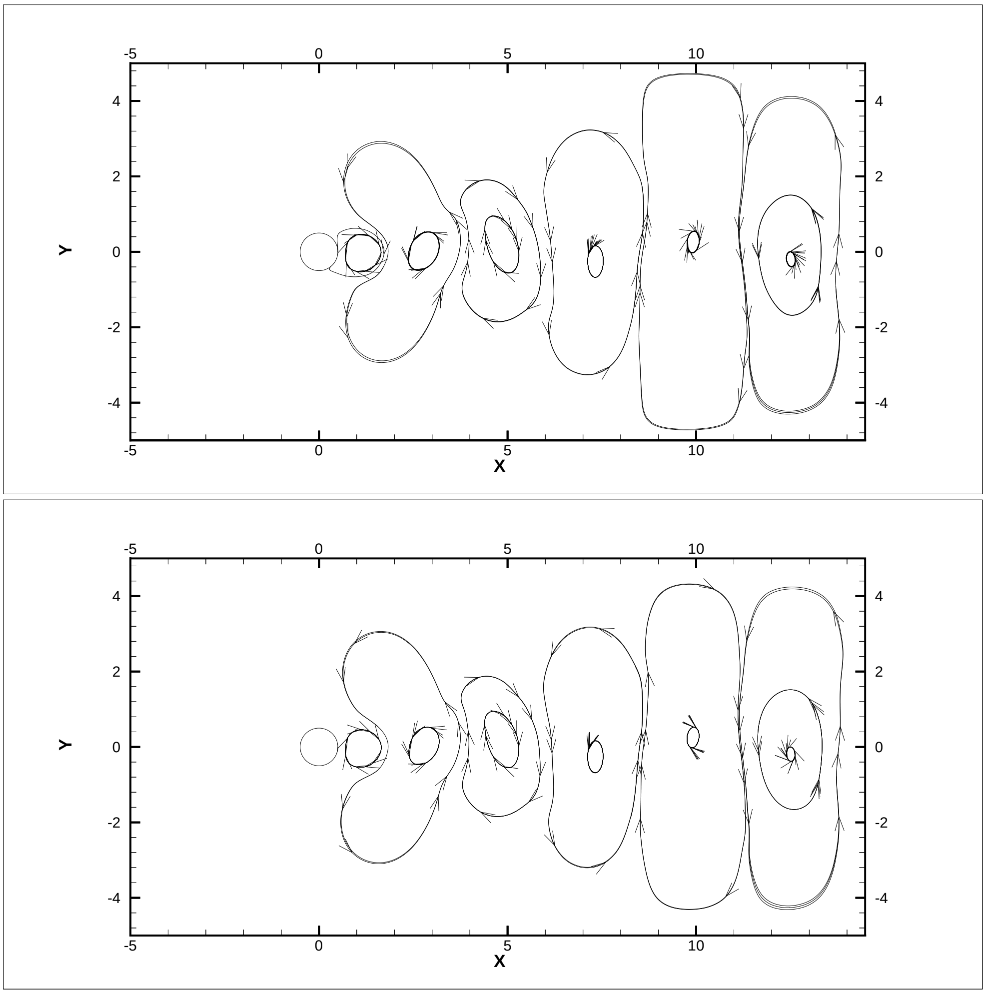

Abbildung 6: Stromlinien des ersten POD-Modes des Zustandsfunktion $d_c(x,t)$ (oben) und der Kontrolle $u(x,t)$ (unten). Volumenkontrolle und Volumenbeobachtung im ganzen Gebiet.

dung diejenige der Wahl sein.

Modellreduktion: Mittels Snapshot-basierter Modellreduktion nach Sirovich gelingt es, die Dynamik der Zylinderumströmung in zwei Raumdimensionen niedrigdimensional über ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen zu beschreiben. Dieses wird zur Berechnung niedrigdimensionaler Optimalsteuerungen verwendet, welche dann als suboptimale Steuerungen für das volle System Verwendung finden. Die Effizienz der so gewonnenen Steuerungen konnten wir durch Iteration dieses Prozesses mit dem Verfahren **ISO** wesentlich verbessern. Die so erhaltenen Steuerungen erreichen einen Wirkungsgrad, der dem der Optimalsteuerung für das volle System sehr nahe kommt. Die für die numerische Berechnung der suboptimalen Steuerungen benötigte CPU Zeit ist allerdings um Größenordnungen geringer als die für die numerische Berechnung der entsprechenden Optimalsteuerung für das volle System benötigten Rechenzeit. Die wesentlichen Vorteile von **ISO** aus der Sicht der Autoren werden nachfolgend aufgezählt.

- Leichte Portierbarkeit von **ISO** auf andere und komplexere Strömungskonfigurationen.

- Zur Durchführung des Verfahrens wird nur ein zuverlässiger Vorwärtslöser für die numerische Berechnung der Snapshots benötigt, die numerische Behandlung und Diskretisierung von hochdimensionalen adjungierten Systemen entfällt.

- Die von **ISO** erzeugte Modenbasis eignet sich sowohl zur Darstellung kontrollierter als auch unkontrollierter Strömungszustände. Das mittels **ISO** erhaltene reduzierte dynamische System wird daher günstig für die Konstruktion niedrigdimensionaler Regler sein.

- Gezielte Beeinflussung dominanter Strukturen ist möglich.

b) für den Sfb 557

Die entwickelten Verfahren zur numerischen Berechnung von Optimalsteuerungen können auch für komplexere Strömungskontrollprobleme angewendet werden. Im Stadium der Methodenentwicklung dienen Optimalsteuerungen zur Validierung und Quantifizierung suboptimaler Kontrollstrategien.

Modell-Prädiktive Verfahren liefern schnell brauchbare Steuerungen. Diese Verfahren sind einfach auf komplexere Strömungskonfigurationen erweiterbar (sie werden mittlerweile auch von TP A6 zur Kontrolle verwendet). Insbesondere die Interpretation dieser Methode als geschlossener Regelkreis eröffnet deren Einsatz als (Echtzeit-) Kontrollmechanismus für zahlreiche Strömungskonfigurationen, die im Rahmen des Sfbs untersucht werden.

Methoden der Modellreduktion dienen als Analysewerkzeug für komplexe Strömungen. Sie bieten darüber hinaus die Möglichkeit, Kontrolleingriffe in die Strömung maßzuschneidern, in dem die für die zu unterdrückenden Mechanismen verantwortlichen Strukturen in der Strömung gezielt beeinflußt werden. Mit **ISO** haben wir ein Verfahren entwickelt, daß diesen beiden genannten Aspekten gerecht wird. Die numerisch berechneten Steuerungen erreichen nahezu die Qualität der entsprechenden Optimalsteuerung für das volle System. Wir haben das **ISO**-Verfahren zur suboptimalen Kontrolle von Strömungen eingesetzt und dessen Wirkungsweisen am Beispiel des umströmten Kreiszylinders studiert. Da für die Durchführung des Verfahrens nur Vorwärtsrechnungen des zu kontrollierenden Systems benötigt werden, kann dieses Verfahren leicht nach anderen DNS und RANS-Lösern portiert werden. Insbesondere könnten mit Hilfe der bei den Arbeiten zur Eigenmodenanalyse der Stufenströmung berechneten Daten auch suboptimale Steuerungen für die überströmte Stufe numerisch berechnet werden.

Momentan wird von Herrn Kay, unserer studentischen Hilfskraft, in Kooperation mit dem Sfb 288 an einer Java-View unterstützten Visualisierung von Strömungsdaten gearbeitet. Diese Arbeiten können voraussichtlich mit dem Ende des Teilprojekts abgeschlossen werden. Damit stünde eine platformunabhängige Möglichkeit zur Visualisierung von Strömungsdaten für den gesamten Sfb zur Verfügung.

Rückmeldungen auf die von unserem Teilprojekt unterbreiteten Vorschläge zur Darstellung des Sfbs im Internet sind weitgehend ausgeblieben. Ein Verbesserung der Aussendarstellung des Sfbs im Internet ist aus unserer Sicht allerdings wünschenswert. Gleiches gilt für den Informationsfluß innerhalb des Sfbs. Hier könnte unserer Vorschlag einer eigenen Preprintreihe für den Sfb sicherlich gute Dienste leisten. Darüber hinaus würden die Arbeiten des Sfbs durch eine Preprintreihe schneller einer breiten Öffentlichkeit zur Verfügung stehen.

3.4 Offene Fragen und Ausblick

1. Das Verfahren **ISO** ist zur Optimierung von niedrigdimensionalen laminaren Strömungen ausgezeichnet geeignet. Für die niedrigdimensionale Darstellung transitioneller und turbulenter Strömungen werden jedoch eine wesentlich größere Anzahl von Moden benötigt. Experimente zeigen allerdings, daß die Anregung der niedrigfrequenten Moden einer turbulenten Strömung zur Reduzierung von deren Dimension führen kann. Die niedrigfrequenten instabilen Moden versklaven dabei der hochfrequenten kleinskaligen Moden. Dadurch eröffnet sich die Möglichkeit, das Verfahren **ISO** auch für die numerische Berechnung von Kontrollen für turbulenten Strömungen verwenden zu können. Dabei bleibt zunächst offen, ob und wie eine geeignete niedrigdimensionale Approximation von turbulenten Strömungen mit *Snapshot*-Methoden erreicht werden kann, und auch, ob zur Kontrolle turbulenter Strömungen eine quantifizierbare niedrigdimensionale Beschreibung überhaupt notwendig ist.
2. Die Konstruktion von Kostenfunktionalen für die Optimierung wird weiterhin eine bedeutende Rolle spielen. Dabei wird es darum gehen, zu kontrollierende Effekte in physikalisch quantifizierbaren und meßbaren Termen darzustellen, oder dies' zumindest für die Ursachen dieser Effekte zu gewährleisten. Aus experimenteller Sicht sind Fragen nach Sensor- und Aktuatorplatzierung sehr wichtig. Nach welchen Kriterien sollen Sensoren und Aktuatoren wo plaziert werden?
3. Können Regler, die auf der Grundlage linearisierter Dynamiken basieren, zur Kontrolle stark nichtlineare Phänomene wie Turbulenz effizient eingesetzt werden?
4. . . .

Literatur

[1] **Afanasiev, K.; Bärwolff, G.; Hinze, M.** & **Kauffmann, A.** Entwicklung von Feedback-Controllern zur Beeinflussung abgelöster Strömungen. Zwischenbericht über die Arbeiten des Teilprojektes C3 im SFB 557, 2000.

[2] **Afanasiev, K.** & **Hinze, M.** Adaptive control of a wake flow using proper orthogonal decomposition. In *Shape Optimization & Optimal Design* (2001), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker. see also Preprint No. 648/1999, Fachbereich Mathematik, Technische Universität Berlin.

[3] **Bänsch, E.** An adaptive Finite-Element-Strategy for the three-dimensional time-dependent Navier-Stokes-Equations. *J. Comp. Math. 36* (1991), 3–28.

[4] **Bewley, T.R.; Moin, P.** & **Temam, R.** DNS-based predictive control of turbulence: an optimal benchmark for feedback algorithms. Preprint, 2000. submitted to J. Fluid Mech.

[5] **Chang, Y.** & **Collis, S.** Active control of turbulent channel flows by large eddy simulation. In *Proceedings of the FEDSM99* (1999), ASME.

[6] **Choi, H.; Hinze, M.** & **Kunisch, K.** Instantaneous control of backward-facing-step flows. *Applied Numerical Mathematics 31* (1999), 133–158.

[7] **Glowinski, R.** Finite element methods for the numerical simulation of incompressible viscous flow; Introduction to the Control of the Navier-Stokes Equations. *Lectures in Applied Mathematics 28* (1991).

[8] **Gunzburger, M.D.** A prehistory of flow control and optimization. In *Flow Control* (1995), M. Gunzburger, Ed., vol. 68 of *IMA*, Springer.

[9] **Hinze, M.** Optimal and instantaneous control of the instationary Navier-Stokes equations. Habilitationsschrift, 1999. Fachbereich Mathematik, Technische Universität Berlin.

[10] **Hinze, M.** A remark on second order methods in control of fluid flow, 2000. Fachbereich Mathematik, TU-Berlin, submitted.

[11] **Hinze, M.** The sqp-method for tracking-type control of the instationary navier-stokes equations. Preprint No. 679/2000, submitted, 2000. to appear in the Proccedings of the Algoritmy 2000.

[12] **Hinze, M.** & **Kauffmann, A.** A new class of feedback control laws for dynamical sytems. Preprint No. 602/1998, 1998. Fachbereich Mathematik, Technische Universität Berlin.

[13] **Hinze, M.** & **Kauffmann, A.** Control concepts for parabolic equations with an application to the control of fluid flow. Scientific Computing in Chemical Engineering II, Hamburg Harburg, Springer, 1999. see also Preprint No. 603/1998, Technische Universität Berlin, Deutschland.

[14] **Hinze, M.** & **Kauffmann, A.** On a distributed control law with an application to the control of unsteady flow around a cylinder. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 133, 177–190, Birkhäuser, 1999. see also Preprint No. 597/1998, Technische Universität Berlin, Deutschland.

[15] **Hinze, M.** & **Kauffmann, A.** Reduced order modeling and suboptimal control of a solid fuel ignition model. Preprint No. 636/1999, 1999. Technische Universität Berlin.

[16] **Hinze, M.** & **Kunisch, K.** On suboptimal Control Strategies for the Navier-Stokes Equations. ESAIM: Proceedings, Vol. 4, 1998, 181-198, http://www.emath.fr/proc/Vol.4 (1998), France.

[17] **Hinze, M.** & **Kunisch, K.** Three control methods for time - dependent Fluid Flow. Preprint No. 660/2000. Fachbereich Mathematik, Technische Universität Berlin, to appear in Journal of Flow, Control and Combustion.

[18] **Hinze, M.** & **Kunisch, K.** Control strategies for fluid flows - optimal versus suboptimal control. In *ENUMATH 97* (1997), H. et al., Ed., World Scientific, pp. 351–358. Singapore.

[19] **Hinze, M.** & **Kunisch, K.** Suboptimal Control of fluid flows. Operations Research Proceedings 1997, Jena, Editors P. Kischka, H.W. Lorenz, U. Derigs, W. Domschke, P. Kleinschmidt, R. Möhring, Springer, 1997. see also Preprint No. 567/1997, Technische Universität Berlin, Deutschland.

[20] **Hinze, M.** & **Kunisch, K.** Suboptimal Control Strategies for backward facing step flows. In *Proceedings of the 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics* (Berlin, 1997), A. Sydow, Ed., vol. 3, p. 53-58.

[21] **Hinze, M.** & **Kunisch, K.** Newton's method for tracking-type control of the instationary Navier-Stokes equations, 1999. to appear in ENUMATH 99, Eds. P. Neittaanmäki et al., Jyväskylä, Finland.

[22] **Hinze, M.** & **Kunisch, K.** Second order methods for optimal control of time-dependent fluid flow. Bericht Nr. 165, Spezialforschungsbereich Optimierung und Kontrolle, 1999. Institut für Mathematik, Karl-Franzens-Universität Graz, submitted.

[23] **Hinze, M.** & **Volkwein, S.** Instantaneous control for the Burgers equation: Convergence anlysis and numerical implementation. Bericht Nr. 170, Spezialforschungsbereich Optimierung und Kontrolle, 1999. Institut für Mathematik, Karl-Franzens-Universität Graz, submitted.

[24] **Park, J.** & **Choi, H.** Effects of uniform blowing or suction from a spanwise slot on a turbulent boundary layer flow. Preprint, 1999. Department of Mechanical Engineering, Seoul National University.

[25] **Schäfer, M.** & **Turek, S.** Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. Flow simulation with high-performance computers II. DFG priority research programme results 1993 - 1995., 1996. Hirschel, Ernst Heinrich (ed.), Wiesbaden: Vieweg. Notes Numer. Fluid Mech. 52, 547-566.

[26] **Sirovich, L.** Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part I-III. *Quarterly of Applied Mathematics 45* (1987), 561–590.

[27] **Temam, R.** *Navier-Stokes Equations*. North-Holland, 1979.

[28] **Temam, R.; Bewley, T.** & **Moin, P.** Control of turbulent flows. In *Proceedings of the 18th IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization* (Detroit, Michigan, 1997).

[29] **Tröltzsch, F.** & **Unger, A.** Fast solution of optimal control problems in selective cooling of steel. Preprint SFV393/99-07, 1999. Sonderforschungsbereich 393, Technische Universität Chemnitz.