Mathematik II 14.+15. Übung (23. 1. - 3. 2. 06)

Partielle Differentialgleichungen Teil 3

7. **Eigenwertaufgabe für gewöhnliche DGLn**

Durch die Differentialgleichung

$$-y''(x) = \lambda\, y(x), \quad \forall\, x \in (0,1) \tag{1}$$

und jeweils einen der Sätze von Randbedingungen

$$\begin{array}{lrclrcl} (i) & y(0) & = & 0, & y(1) & = & 0, \\ (ii) & y'(0) & = & 0, & y'(1) & = & 0, \\ (iii) & y(0) & = & y(1), & y'(0) & = & y'(1) \end{array}$$

wird eine Eigenwertaufgabe für gewöhnliche DGLn beschrieben.
Dabei heißt $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert, falls Funktionen $y \not\equiv 0$ existieren, die (1) und den entsprechenden Randbedingungen genügt, und jede Funktion y mit diesen Eigenschaften heißt zu λ gehörige Eigenfunktion.

i. Man bestimme alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ für (1) und jeweils (i), (ii) oder (iii) sowie zugehörige Eigenfunktionen y.

ii. Lediglich aus der Differentialgleichung (1) und den jeweiligen Randbedingungen folgere man durch partielle Integration, dass

$$\int_0^1 y(x)\, v(x)\, dx = 0$$

für zu Eigenwerten $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq \mu$ gehörige Eigenfunktionen y bzw. v gilt.
Hinweis: Man zeige zunächst, dass

$$-\int_0^1 y''(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 y'(x)\, v'(x)\, dx$$

für beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktionen y, v gilt, die beide einen der Sätze von Randbedingungen (i), (ii) bzw. (iii) genügen.

---

8. Die Auslenkung $u(x,t)$ einer mit Dämpfung schwingenden Saite der Länge ℓ wird durch

$$u_{tt} + 2\gamma u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (a > 0,\ \gamma > 0 \text{ Konstanten})$$

unter der Bedingung $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ beschrieben.
Welche Lösung ergibt sich unter den AB:

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \sin\frac{\pi}{\ell}\, x \ \text{ im Falle } \gamma < \frac{a\pi}{\ell} \ ?$$

---

9. Man bestimme die Funktion $u = u(x, y)$, die der Laplace-Gleichung

$$-\Delta\, u(x, y) \;=\; 0 \qquad \forall\, x, y \in \Omega \tag{2}$$

und den Randbedingungen

$$u\big|_{\Gamma_1} \;=\; 0, \qquad u\big|_{\Gamma_2} \;=\; y \tag{3}$$

genügt. Dabei bezeichnen

$$\Omega := \left\{\, x, y \in \mathbb{R}^2 :\, 1 < x^2 + y^2 < 4 \,\right\},$$

$$\Gamma_1 := \left\{\, x, y \in \mathbb{R}^2 :\, x^2 + y^2 = 1 \,\right\}, \qquad \Gamma_2 := \left\{\, x, y \in \mathbb{R}^2 :\, x^2 + y^2 = 4 \,\right\}.$$

Anleitung: Man wende auf die auf Polarkoordinaten transformierte Laplace-Gleichung

$$\frac{1}{r}\Big(r\, v_r\Big)_r + \frac{1}{r^2}\, v_{\varphi\varphi} = 0 \;\text{ für }\; v(r, \varphi) = u[x(r, \varphi),\, y(r, \varphi)]$$

den Produktansatz $v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ an.

---

10. Die Wärmeleitungsgleichung für einen isolierten dünnen Ring lautet

$$u_t = a^2 u_{\varphi\varphi}, \quad t > 0, \varphi \in [0, 2\pi]$$

mit einer Konstanten $a \neq 0$.
Man bestimme diejenige Lösung dieser PDGL, die der Anfangsbedingung $u(\varphi, 0) = |\sin\varphi|$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$ genügt. Da der Ring geschlossen ist, ergeben sich die Randbedingungen sachgemäß aus der periodischen Fortsetzbarkeit der Lösung.

---

11. Man bestimme die Lösung $u(x, t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx} = 4u_{tt}, \quad t > 0, x \in (0, 1),$$

mit den Randbedingungen

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \qquad \text{für } \; t > 0,$$

und mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad u_t(x, 0) = x(x - 1), \qquad \text{für } \; x \in [0, 1].$$
