Universität Hamburg

9. Übung zur Funktionentheorie 2: Riemannsche Flächen

Abgabe: Donnerstag, 9. Juli vor der Übung

Aufgabe 1 (Fünferlemma)
Das folgende Diagramm abelscher Gruppen sei kommutativ mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E \end{tikzcd}$$

Unter der Annahme, dass α, β, δ, ϵ Isomorphismen sind, zeige, dass auch γ ein Isomorphismus sein muss.

Aufgabe 2
Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Beschreibe eine Basis der deRham-Kohomologiegruppe

$$\frac{\ker\big(\mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X)\big)}{\operatorname{im}\big(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X)\big)}$$

des Torus $X = \mathbb{C}/\Gamma$. (Hinweis: Aufgaben 5.2 & 7.1)

Aufgabe 3
Berechne $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}^*)$.

Aufgabe 4
Sei $\quad 0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0 \quad$ eine kurze exakte Sequenz von Garben auf X.
Sei $U \subseteq X$ offen, und sei $h \in \mathcal{H}(U)$.
Zeige, dass es eine Überdeckung $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ von U gibt und $g_i \in \mathcal{G}(V_i)$ für alle $i \in I$, so dass $\beta(g_i) = h|_{V_i}$.