

8. Übung zur Funktionentheorie 2: Riemannsche Flächen

Abgabe: Donnerstag, 25. Juni vor der Übung

Aufgabe 1 (Bairescher Kategoriensatz)

Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Seien $U_n \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ offen und dicht. Zu einer beliebigen offenen Menge $W \subset X$ konstruiere eine Folge $B_0 \subset B_1 \subset \dots$ metrischer Bälle mit $B_n \subset U_n \cap W$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Folgere, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} U_n \subset X$ dicht ist.

Folgere weiter, dass X nicht die Vereinigung abzählbar vieler nirgends-dichter Teilmengen sein kann. ($A \subset X$ ist nirgends-dicht falls $\overline{A}$ keine inneren Punkte hat.)

Aufgabe 2 (Satz von der offenen Abbildung)

Sei $F: X \rightarrow Y$ eine surjektive stetige lineare Abbildung zwischen Banachräumen. Zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jedes $y \in Y$ und $\epsilon > 0$ ein $x \in X$ existiert mit $\delta\|x\| < \|y\|$ und $\|y - Ax\| < \epsilon$. (Hinweis: $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} F(B_X(0, n))$.)

Folgere, dass $B_Y(0, \delta/2) \subseteq F(B_X(0, 1))$, dass also F eine offene Abbildung ist.

Aufgabe 3

Sei $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Garbenhomomorphismus. Zeige, dass α Homomorphismen der Halme induziert.

Aufgabe 4

Zeige, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{d \log} \Omega \longrightarrow 0$$

exakt ist, wobei $(d \log)(f) = \frac{df}{f}$.