Universität Hamburg

7. Übung zur Funktionentheorie 2: Riemannsche Flächen

Abgabe: Donnerstag, 11. Juni vor der Übung

Aufgabe 1
Wähle ein Gitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$ und berechne $H^1(\mathbb{C}/\Gamma, \mathbb{C})$.

Aufgabe 2
Sei X eine Riemannsche Fläche, sei $U \subseteq X$ offen und sei $V \subset U$ relativ kompakt. Das heißt, der Abschluss $\overline{V}$ ist kompakt und in U enthalten.
Zeige, dass V nur endlich viele Zusammenhangskomponenten von U trifft.
Zeige, dass es für kompaktes X endliche offene Überdeckungen $\mathcal{U} = (U_1, \ldots, U_N)$ und $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, U_N)$ gibt, so dass $V_i \subset U_i$ für alle i relativ kompakt ist.

Aufgabe 3
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, und seien $\mathcal{U} = (U_1, \ldots, U_N)$, $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, U_N)$ endliche offene Überdeckungen von X, so dass $V_i \subset U_i$ für alle i relativ kompakt ist.
Zeige, dass das Bild von $t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} \colon Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \to Z^1(\mathcal{V}, \mathbb{C})$ ein endlichdimensionaler Vektorraum ist. Folgere, dass $H^1(X, \mathbb{C})$ ein endlichdimensionaler Vektorraum ist.

Aufgabe 4
Zeige, dass $H^1(\mathbb{C}, \Omega) = 0$. Berechne damit $H^1(\mathbb{P}^1, \Omega)$.