Universität Hamburg

5. Übung zur Funktionentheorie 2: Riemannsche Flächen

Abgabe: Donnerstag, 14. Mai vor der Übung

Aufgabe 1
Zeige, dass die 1-Form dz/z auf $\mathbb{C}^*$ geschlossen aber nicht exakt ist.

Für die folgenden drei Aufgaben sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, und $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die Quotientenabbildung auf den Torus $\mathbb{C}/\Gamma$.

Aufgabe 2
Zeige, dass die holomorphe 1-Form dz auf $\mathbb{C}$ zu einer holomorphen 1-Form auf $\mathbb{C}/\Gamma$ absteigt: es gibt ein $\omega \in \Omega(\mathbb{C}/\Gamma)$, so dass $dz = p^*\omega$.
Sei $\gamma \in \Gamma$. Berechne für die durch $c(t) = p(t\gamma)$ gegebene geschlossene(!) Kurve $c\colon [0,1] \to \mathbb{C}/\Gamma$ das Integral $\int_c \omega$. Folgere, dass ω geschlossen aber nicht exakt ist.

Aufgabe 3
Zeige, dass die 2-Form $dz \wedge d\bar{z}$ auf $\mathbb{C}$ zu einer 2-Form ω auf $\mathbb{C}/\Gamma$ absteigt: es gibt ein $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(\mathbb{C}/\Gamma)$, so dass $dz \wedge d\bar{z} = p^*\omega$.
Was ist $\int_{\mathbb{C}/\Gamma} \omega$? Ist ω exakt?

Aufgabe 4
Zeige, dass es keine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ geben kann, die genau einen Pol erster Ordnung hat.