

4. Übung zur Polyedrischen Algebra

Aufgabe 1

Sei $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ eine Vektorkonfiguration und $\Delta \subseteq 2^A$ eine Unterteilung.

Das heißt,

1. $G \prec F \in \Delta \Rightarrow G \in \Delta$, („ $G \prec F$ “ bedeutet $G = \tilde{G} \cap F$ für eine Seite $\tilde{G}$ von $\text{conv } F$.)
2. $\bigcup_{F \in \Delta} \text{cone } F = \text{cone } A$, und
3. $F, G \in \Delta, F \neq G \Rightarrow \text{relint cone } F \cap \text{relint cone } G = \emptyset$.

Zeige, dass die „übliche“ Bedingung

$$F, G \in \Delta \Rightarrow \text{cone } F \cap \text{cone } G \text{ ist Seite von } \text{cone } F \text{ und von } \text{cone } G$$

erfüllt ist.

Aufgabe 2

Bestimme den Gröbnerfächer (ω und ω' im gleichen Kegel, wenn $\text{in}_\omega(I_A) = \text{in}_{\omega'}(I_A)$) und den Sekundärfächer (ω und ω' im gleichen Kegel, wenn $\Delta_\omega(A) = \Delta_{\omega'}(A)$) für die twisted Cubic $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 3

Sei $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Zeige, dass die Triangulierung (gegeben durch die Indexmengen der maximalen Seite) $\Delta = \{125, 145, 236, 256, 134, 346, 456\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 4

Sei $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ ein Untergitter. Definiere $\psi: \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}[\mathbb{Z}^n/\Lambda]$ durch $\psi(x_i) = e_i + \Lambda$. Zeige, dass das Gitterideal $I_\Lambda = \ker \psi$ als $\mathbb{k}$ -Vektorraum von Binomen $x^u - x^v$ für $u - v \in \Lambda$ erzeugt ist.