

4. Übung zur Funktionentheorie 2: Riemannsche Flächen

Abgabe: Donnerstag, 7. Mai vor der Übung

Aufgabe 1

Sei X eine Riemannsche Fläche. Sei $a \in X$, und sei $(U, z = x + iy)$ eine Karte um a . Wir haben Untervektorräume $\mathfrak{m}_a^2 \subset \mathfrak{m}_a \subset \mathcal{E}_a$ des Halms $\mathcal{E}_a$ definiert als

$$\mathfrak{m}_a := \{\phi \in \mathcal{E}_a : \phi(a) = 0\} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{m}_a^2 := \{\phi \in \mathcal{E}_a : \phi(a) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(a) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(a) = 0\}.$$

Zeige, dass diese Unterräume nicht von der gewählten Karte abhängen.

Konstruiere X , a , wie oben sowie Karten $(U, z = x + iy)$ und $(U', z' = x' + iy')$ um a zusammen mit einem Keim $\phi \in \mathfrak{m}_a$ so dass $\frac{\partial \phi}{\partial x}(a) = 0$ aber $\frac{\partial \phi}{\partial x'}(a) \neq 0$.

Aufgabe 2

Sei $F: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen.

Zeige, dass $F^*: \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$ durch $F^*(\sum_i f_i dg_i) = \sum_i F^* f_i d(F^* g_i)$ wohldefiniert ist.

Aufgabe 3

Für $F = \exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ und $\omega = \frac{dz}{z}$ auf $\mathbb{C}^*$, bestimme $F^*\omega$.

Aufgabe 4

Sei $F: Y \rightarrow X$ holomorph, $a = F(b)$ mit Vielfachheit k , und sei ω eine holomorphe 1-Form auf $X \setminus \{a\}$.

Zeige $\text{Res}_b(F^*\omega) = k \text{Res}_a(\omega)$.