Universität Hamburg

3. Übung zur Polyedrischen Algebra

Aufgabe 1
Bezeichne $\Delta_d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1}_{\geq 0} \ : \ \sum x_i = 1\}$ den d-dimensionalen Standardsimplex. Zeige, dass

$$\mathrm{ehr}(\Delta_d; k) \ = \ \binom{d+k}{d} \ = \ \frac{1}{d!}(d+k)(d+k-1)\cdots(k+1)\,,$$

und dass $(-1)^d \,\mathrm{ehr}(\Delta_d; -k) \ = \ \binom{k-1}{d}$ innere Gitterpunkte zählt.

Aufgabe 2
Sei $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Zeige dass $f_m(k) := \sum_{j=1}^{k} j^m$ ein Polynom in k ist.
Bestimme Grad und Leitkoeffizient.

Aufgabe 3
Seien $p, q \in \mathbb{Z}$ coprim. Zeige, dass die einzigen Gitterpunkte im Tetraeder $\Delta_{pq} := \mathrm{conv}\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 & q \end{smallmatrix}\right]$ die Ecken von Δ_{pq} sind. Berechne das Ehrhart-Polynom von Δ_{pq}.
Für welche Parameter sind Δ_{pq} and $\Delta_{p'q'}$ unimodular äquivalent?

Aufgabe 4
Ein Simplex, der unimodular äquivalent zum Standardsimplex ist heißt unimodular. Eine Triangulierung ist unimodular wenn alle ihre Simplexe unimodular sind.
Angenommen P hat eine unimodulare Triangulierung $\mathcal{T}$ mit f_0 Ecken, f_1 Kanten, …, f_d d-Simplexen. Zeige, dass

$$\mathrm{ehr}(P; n) = \sum_{k=0}^{d} f_k \binom{n-1}{k}\,.$$

Folgere, dass je zwei unimodulare Triangulierungen den gleichen f-Vektor $(f_0, \ldots, f_d)$ haben.
Bestimme das Ehrhart-Polynom des Kreuzpolytops $\lozenge_d = \mathrm{conv}[\pm e_1, \ldots, \pm e_d]$.

Aufgabe 5
Berechne das Ehrhart-Polynom des Birkhoff-Polytops.

…just kidding.