3. Übung zur Funktionentheorie 2: Riemannsche Flächen

Abgabe: Donnerstag, 30. April vor der Übung

Aufgabe 1 (Wolkenkratzer-Garbe)
Sei $(X, \mathbb{T})$ ein topologischer Raum (mit mehr als einem Punkt), sei $a \in X$, und sei G eine nichttriviale abelsche Gruppe. Rechne nach, dass durch

$$\mathcal{G}(U) = \begin{cases} G & \text{wenn } U \ni a \\ \{0\} & \text{wenn } U \not\ni a \end{cases} \quad \text{und} \quad \rho_V^U = \begin{cases} \mathrm{id}_G & \text{wenn } V \ni a \\ 0 & \text{wenn } V \not\ni a \end{cases}$$

für $U, V \in \mathbb{T}$ eine Garbe $\mathcal{G}$ auf X definiert wird.

Berechne die Halme von $\mathcal{G}$. Ist $|\mathcal{G}|$ Hausdorffsch?

Aufgabe 2 (Halme als Gruppen)
Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf X, und sei $a \in X$. Zeige, dass der Halm $\mathcal{F}_a$ mit repräsentantenweiser Verknüpfung eine abelsche Gruppe ist.
Das heißt, für Keime $\phi, \psi \in \mathcal{F}_a$ wähle Repräsentanten: $f \in \mathcal{F}(U)$ und $g \in \mathcal{F}(V)$ so dass $a \in U, V$ und $\phi = \rho_a(f)$ und $\psi = \rho_a(g)$. Addiere Repräsentanten:

$$\phi + \psi := \rho_a(f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V}) \, .$$

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X, und sei $U \subseteq X$ offen. Zeige, dass für ein Element $f \in \mathcal{F}(U)$ gilt,

$$f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Für alle } a \in U \text{ ist } \rho_a(f) = 0 \in \mathcal{F}_a \, .$$

Aufgabe 4
Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X mit Überlagerung $p \colon |\mathcal{F}| \to X$. Zeige, dass

$$\widetilde{\mathcal{F}}(U) = \{ f \colon U \to |\mathcal{F}| \ : \ f \text{ stetig} \ , \ p \circ f = \mathrm{id}_U \}$$

mit den natürlichen Einschränkungsmorphismen eine Garbe definiert.

Zeige, dass es einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{F}_a \to \widetilde{\mathcal{F}}_a$ $(a \in X)$ der Halme gibt.