

### 3. Übung zur Funktionentheorie 2: Riemannsche Flächen

Abgabe: Donnerstag, 30. April vor der Übung

#### Aufgabe 1

Sei  $(X, T)$  ein Hausdorffraum (mit mehr als einem Punkt) und sei  $G$  eine nichttriviale abelsche Gruppe. Rechne nach, dass durch

$$\mathcal{G}(U) = \begin{cases} G & \text{wenn } U \neq \emptyset \\ \{0\} & \text{wenn } U = \emptyset \end{cases} \quad \text{und} \quad \rho_V^U = \begin{cases} \text{id}_G & \text{wenn } V \neq \emptyset \\ 0 & \text{wenn } V = \emptyset \end{cases}$$

für  $U, V \in \mathcal{T}$  eine Prägarbe auf  $X$  definiert wird, die keine Garbe ist.

Zeige, dass durch

$$\tilde{\mathcal{G}}(U) = \{ \phi: U \rightarrow G \mid \phi \text{ lokalkonstant} \} \quad \text{und} \quad \tilde{\rho}_V^U(\phi) = \phi|_V$$

eine Garbe definiert wird, die die gleichen Halme hat wie  $\mathcal{G}$ .

#### Aufgabe 2 (Wolkenkratzer-Garbe)

Sei  $(X, T)$  ein topologischer Raum (mit mehr als einem Punkt), sei  $a \in X$ , und sei  $G$  eine nichttriviale abelsche Gruppe. Rechne nach, dass durch

$$\mathcal{G}(U) = \begin{cases} G & \text{wenn } U \ni a \\ \{0\} & \text{wenn } U \not\ni a \end{cases} \quad \text{und} \quad \rho_V^U = \begin{cases} \text{id}_G & \text{wenn } V \ni a \\ 0 & \text{wenn } V \not\ni a \end{cases}$$

für  $U, V \in T$  eine Garbe  $\mathcal{G}$  auf  $X$  definiert wird.

Berechne die Halme von  $\mathcal{G}$ . Ist  $|\mathcal{G}|$  Hausdorffsch?

#### Aufgabe 3 (Vielfachheit)

Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine nichtkonstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen, und sei  $a \in X$ ,  $b := f(a)$ . Zeige, dass es zu jeder Umgebung  $U_0$  von  $a$  Umgebungen  $U \subseteq U_0$  von  $a$  und  $V$  von  $b$  gibt, so dass die Zahl  $k := |f^{-1}(y) \cap U|$  für alle  $y \in V \setminus \{b\}$  konstant ist.

Zeige, dass die Menge der  $a \in X$  mit  $k > 1$  diskret ist.

#### Aufgabe 4

Sei  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  eine nichtkonstante holomorphe Funktion auf einer Riemannschen Fläche. Zeige, dass  $\text{Re}(f)$  das Maximum nicht annimmt.