Universität Hamburg

1. Übung zur Funktionentheorie 2: Riemannsche Flächen

Abgabe: Freitag, 17. April vor der Übung

Aufgabe 1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)
Sei U eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche und $a \in U$. Sei V eine Umgebung von a, auf der die Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ beschränkt ist. Zeige, dass sich f eindeutig zu einer Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ fortsetzen läßt.

Aufgabe 2 (Ein Automorphismus von $\mathbb{P}^1$)
Sei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2\,\mathbb{C}\,.$$

Zeige, dass die Abbildung

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

zu einer biholomorphen Abbildung $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 3 (Klassifikation elliptischer Kurven)
Zeige, dass jede elliptische Kurve $\mathbb{C}/\Gamma$ isomorph zu einer elliptischen Kurve der Form

$$E(\tau) := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$$

mit $\operatorname{Im}\tau > 0$ ist.
Für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ definiere

$$\tau' := \frac{a\tau + b}{c\tau + b}\,.$$

Zeige, dass $E(\tau)$ und $E(\tau')$ isomorph sind.

Aufgabe 4 (Pullback)
Seien X und Y Riemannsche Flächen und sei $f\colon X \to Y$ holomorph. Zeige, dass durch

$$\begin{array}{cccc} f^*\colon & \mathcal{O}(Y) & \to & \mathcal{O}(X) \\ & \phi & \mapsto & \phi \circ f \end{array}$$

ein Ringhomomorphismus (der Pullback von f) definiert wird.
Rechne nach, dass für holomorphe Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ zwischen Riemannschen Flächen $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ gilt.