HAMILTON-SYSTEME SIND VOLUMENERHALTEND... UND BESSER

Wir wissen schon: Für jedes Hamilton-System im $\mathbb{R}^{2n}$,

$$\dot{u} = J\nabla H(u),$$

wobei ∇H der Gradient einer (glatten) Funktion $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ ist,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

und $E =$ die $n \times n$-Einheitsmatrix, gilt:

Der Hamiltonfluss ist volumenterhaltend.

Jetzt zeigen wir, dass auf Mannigfaltigkeiten dasselbe gilt, und sogar etwas stärkeres: jeder Hamiltonfluss ist *symplektisch.*

Theorem 0.1. *Sei M eine Mannigfaltigkeit, ω eine symplektische Form auf M, sei $H : M \to \mathbb{R}$ glatt und $\varphi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ der Hamilton-Fluss. Dann ist φ symplektisch, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$(\varphi_t)^*\omega = \omega.$$

Dieser Satz macht nur Aussagen über geradedimensionale Mannigfaltigkeiten, denn andernfalls gibt es keine symplektische Form.

Beweis. Sei $\tau \in \mathbb{R}$ beliebig, $f := \varphi_\tau$. Wir wollen zeigen: $f^*\omega = \omega$. Es genügt, dies für $\tau \geq 0$ zu zeigen, denn f ist invertierbar.

Es genügt zu zeigen: für jede 2-Zelle c (eventuell mit Rand) gilt

$$\int_c \omega = \int_{fc} \omega.$$

Zunächst "verlängern" wir c längs des Flusses: Sei

$$Fc := \varphi^{[0,\tau]}c.$$

Dieses Objekt ist eine 3-Zelle, die dadurch entsteht, dass wir c mittels φ durch M schieben. Der Rand von Fc besteht aus folgenden Komponenten:

- dem vorderen Ende (wo wir aufhören zu schieben), also $\varphi^\tau c$ $(= fc)$;
- dem hinteren Ende (wo wir anfangen zu schieben), also $\varphi^0 c$ $(= c)$;
- dem ursprünglichen Rand von c, welcher einfach mitgeschoben wird, also $\varphi^{[0,\tau]}\partial c$ $(= F\partial c)$.

Es gilt also:

$$\partial(Fc) = fc - c - F\partial c,$$

wobei die Vorzeichen auf der rechten Seite (+,-,-,) von der Orientierung herkommen. (In Kürze: der Rand einer orientierten k-Zelle ist eine orientierte $(k-1)$-Zelle, und die Orientierung letzterer ist so gewählt, dass sie zusammen mit "nach außen" zeigenden Vektoren wieder die Orientierung von c ergibt.)

Wir schieben im Beweis noch ein Lemma und ein Korollar ein.

Lemma 0.2. *a Sei γ eine 1-Zelle. Dann gilt:*

$$\frac{d}{d\tau}\int_{F\gamma} \omega = \int_{f\gamma} dH.$$

(Hierbei hängt das Integral auf der linken Seite tatsächlich von τ ab, denn F hängt von τ ab.)

Beweis. OBdA ist γ eine Kurve mit Definitionsbereich [0,1].

Wir definieren die beiden Vektorfelder

$$\xi(s,t) := \frac{\partial}{\partial s}\varphi_t\gamma(s),$$
$$\eta(s,t) := \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t\gamma(s).$$

Dies sind beides Vektorfelder tangential an M am Punkt $\varphi_t\gamma(s)$. Das Feld η ist – und das ist beachtlich – ein hamiltonsches. Nämlich X_H, denn es gilt

$$X_H(u) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t(u).$$

Insbesondere gilt:

$$\omega(\eta,\xi) = \omega(X_H,\xi) = dH\cdot\xi.$$

Deswegen stellen wir fest:

$$\int_{F\gamma}\omega = \int_{t=0}^{\tau}\int_{s=0}^{1}\omega(\xi,\eta)ds\,dt$$
$$= \int_{t=0}^{\tau}\left(\int_{\varphi_t\gamma} dH\right)dt.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Aus diesem Lemma schließen wir:

Corollary 0.3. *Sei γ geschlossene 1-Kette (d.h. $\partial\gamma = \emptyset$). Dann gilt:*

$$\int_{F\gamma}\omega = 0.$$

Beweis. Es gilt wie vorhin
$$\int_{Fc} \omega = \int_{t=0}^{\tau} \left(\int_{\varphi_t \gamma} dH \right) dt,$$
und es gilt
$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_t\gamma} dH &= \int_{\partial\varphi_t\gamma} H \quad \text{(Satz von Stokes)} \\
&= \int_{\varphi_t\partial\gamma} H \quad \text{(wegen Eigenschaften vom Rand)} \\
&= \int_{\emptyset} H \quad \text{(wegen Geschlossenheit)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Nun können wir den Beweis des Satzes abschließen:

Sei c eine 2-Zelle (oder 2-Kette). Für jede symplektische Form gilt $d\omega = 0$. Deshalb gilt
$$\begin{aligned}
0 &= \int_{Fc} d\omega \\
&= \int_{\partial Fc} \omega \quad \text{(nach Stokes)} \\
&= \int_{fc} \omega - \int_{c} \omega - \int_{F\partial c} \omega \quad \text{(nach der Formel für } \partial Fc\text{)} \\
&= \int_{fc} \omega - \int_{c} \omega \quad \text{(wegen obigem Korollar, da } \partial c \text{geschlossenist)}
\end{aligned}$$
wobei wir bei der letzten Gleichung benutzt haben, dass ∂c ein Rand und damit geschlossen ist , d.h. $\partial\partial c = \emptyset$.

Also gilt $\int_{fc} \omega = \int_c \omega$ und somit $\int_c f^*\omega = \int_c \omega$. Da c beliebig ist, folgt die Behauptung
$$(\varphi_t)^* \omega = \omega.$$

□

Ebenso wie im $\mathbb{R}^{2n}$ gilt auch auf Mannigfaltigkeiten die Invarianz der Hamilton-Funktion:

Theorem 0.4. *Jeder Hamilton-Fluss läßt die zugehörige Hamilton-Funktion invariant. D.h. wenn φ der Lösungsfluss zu $\dot{u} = X_H(u)$ ist, dann gilt*
$$\frac{d}{dt} H(\varphi_t(u)) = 0.$$

Beweis. $\frac{d}{dt}H(\varphi_t(u)) = dH\cdot\big(\frac{d}{dt}\varphi_t(u)\big) = \omega(X_H, \frac{d}{dt}\varphi_t(u)) = \omega(X_H, X_H) = 0$. □

Definition 0.5. Eine k-Form α heißt **Invariante des Hamilton-Flusses** oder **Integral der Bewegung**, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle k-Ketten c gilt:

$$\int_{\varphi_t c} \alpha = \int_c \alpha.$$

Die Größen ω und H sind demnach Invarianten des Hamilton-Flusses.

Statt Invariante sagt man auch **absolute Invariante**, wegen folgender Definition:

Definition 0.6. Eine k-Form α heißt **relative Invariante des Hamilton-Flusses** oder **relatives Integral der Bewegung**, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle *geschlossenen* k-Ketten c (d.h. $\partial c = \emptyset$) gilt:

$$\int_{\varphi_t c} \alpha = \int_c \alpha.$$

Analog reden wir von Invarianten eines beliebigen Flusses oder eines beliebigen Diffeomorphismus.

Theorem 0.7. *Wenn α eine relative Invariante ist, dann ist die äußere Ableitung $d\alpha$ eine (absolute) Invariante.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
\int_c d\alpha &= \int_{\partial c} \alpha \quad \text{(Stokes)} \\
&= \int_{\varphi_t \partial c} \alpha \quad \text{(Def. relative Invariante)} \\
&= \int_{\partial \varphi_t c} \alpha \quad \text{(Rand wird auf Rand abgebildet)} \\
&= \int_{\varphi_t c} d\alpha \quad \text{(Stokes).}
\end{aligned}$$

□

Bei diesem Beweis haben wir nicht ausgenutzt, dass φ ein Hamilton-Fluss ist. Deshalb gilt die Aussage auch für beliebige Flüsse oder Diffeomorphismen.

Example 0.8. Im $\mathbb{R}^{2n}$ ist die symplektische 1-Form $\vartheta : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, definiert durch

$$\vartheta(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) := \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$$

eine relative Invariante des Hamilton-Flusses, denn $d\vartheta = \omega$ ist einen Invariante.

Exercise 1. Gilt die Umkehrung von diesem Theorem? D.h. wenn $d\alpha$ eine absolute Invariante ist, muss dann α eine relative sein?