# Bifurkationsanalyse und numerische Analyse einer Verkehrsmodells mit aggresiven Fahrern

Johannes Thrän

20. April 2007

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Das Modell

Wir haben im Rahmen des Seminars schon ein mikroskopisches car following leader-Verkehrsmodell gesehen. Solche Modelle beschreiben das Verhalten jedes einzelnen Fahrers in nur Abhängigkeit von dem Verhalten des vor ihm Fahrenden mit je einer gewöhnlichen Differentialgleichung (meist 2.Ordnung). Dazu betrachtet man eine kreisrunde Straße mit nur einer Spur der Länge $L$ auf der $N$ Fahrer in Autos im Kreis fahren. Dies führt dann zu autonomen Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die alle (quasi) stationäre Lösungen mit konstanten Geschwindigkeiten und konstanten Abständen zulassen. Man interessiert sich dann im Besonderen für die Stabilität solcher Lösungen in Abhängigkeit von Parametern, wie der Verkehrsdichte $\frac{N}{L}$.
Das bereits vorgestellte Modell war ein reines so genanntes Optimale Geschwindigkeit-Modell, das von der Annahme ausgeht, jeder Fahrer habe für einen gegebenen Abstand zum Vordermann eine bevorzugte Geschwindigkeit. Ich will hier ein erweitertes Modell analysieren, das auch eine empirisch beobachtete Aggressivität der Fahrer berücksichtigt; Aggressivität bedeutet hier das (auch vom Abstand abhängige) Bestreben der Fahrer sich der Geschwindigkeit des Vordermanns anzupassen. In dem vorgestellen Modell können beide Verhaltensweisen koexistieren, über einen weiteren Parameter kann dann geregelt werden, welche der beiden überwiegt.
Die Modellvorschrift, nach der die einzelnen Fahrer agieren lautet folgendermaßen:

$$\ddot{x}_j = \frac{1}{T(x_j - x_{j+1})} \left( V(x_j - x_{j+1}) - \dot{x} + \alpha(\dot{x}_j - \dot{x}_{j+1}) F(x_j - x_{j+1}) \right) \qquad (1)$$

für $j = 1, ..N$.

- $x_j$ bezeichnet dabei die Position des j-ten Fahrers auf dem Kreis von einem gegebenen Bezugspunkt, mit der Vorschrift: $x_{N+1} = x_N + L$

- Die Funktion $T$ modelliert hier die Reaktionszeit, sie beeinflusst direkt den Ausschlag der Beschleunigung. Bei einem kleinen Abstand, sollte $T$ die Tatsache reflektieren, dass Autofahrer mit einer größeren Aufmerksamkeit fahren, als bei größeren Abständen. $T$ ist also typischerweise eine rein positive, monoton mit dem Abstand wachsende Funktion, die sich asymtotisch an einen Wert der minimalen Aufmerksamkeit (bei total freier Strecke) annähert.

- Der erste Term der Summe modelliert das schon bekannte Bestreben der Fahrer mit einer vom Abstand abhängigen Lieblingsgeschwindigkeit $V(x_j - x_{j+1})$ zu fahren. Natürlicherweise sollte $V$ positiv definit sein und sich mit steigendem Abstand an eine Höchstgeschwindigkeit annähern, d.h. $V(0) = 0$, $lim_{d\to\infty} = V_{max}$. (Es hat sich für Autofahrer die Forderung eines Wendepunktes im Graphen von $V$ als realistisch erwiesen. Andre Arten von Verkehr: Busse, Lastwagen.. genügen qualitativ anderen Lieblingsgeschwindigkeitsfunktionen.)

- Der zweite Term der Summe beschreibt das aggressive Verhalten der Fahrer, sich nach der Geschwindigkeit des Vordermannes zu richten. Dieses Verhalten wurde experimentell beobachtet und nimmt mit wachsendem Abstand ab. $F$ sollte also eine positiv definite monoton fallende Funktion sein.
- Mit dem Parameter $\alpha \in [0;\infty)$ kann man festlegen welche der beiden Verhaltensmuster überwiegen soll.

# 2 Analytische Bifurkationsanalyse

Zunächst führen wir eine Koordinatentransformation von (absoluten) Koordinaten $x_j$ in Abstände $\phi_j = x_{j+1} - x_j$ durch. Gleichzeitig überführen das System (1) zweiter Ordnung der Dimension $N$ in ein System erster Ordnung der Dimension $2N$, sei also: $\phi_j = x_{j+1} - x_j$ und $\psi_j = \dot{x}$, mit der Vorschrift: $\psi_{N+1} := \psi_1$. Wir erhalten das System:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_j &= \psi_{j+1} - \psi_j \\ \dot{\psi}_j &= \frac{1}{T(\phi_j)} \left[ V(\phi_j) - \psi_j + \alpha(\psi_{j+1} - \psi_j) F(\phi_j) \right] \end{aligned}$$

für $j = 1..N$. Wir arbeiten trotz des Übergangs zu relativen Koordinaten immernoch mit absoluten Geschwindigkeiten.
Aus dem Bestreben jedes Fahrers, sich immer einer optimalen Geschwindigkeit anzupassen und der Tatsache, dass $\sum_{k=1}^{N} \phi_j = L$, folgt, dass die einzige mögliche Fixpunktlösung die ist mit $\phi_j^s = d$, $\psi_j^s = c$, wobei $d = L/N$ den durchschnittlichen Abstand bezeichnet und $c := V(d)$ dessen optimale Geschwindigkeit. Wir interessieren uns im folgenden für die Stabilität dieser Lösung und etwaige Effekte(Verzweigung) bei Stabilitätsverlust.
Durch eine weitere Koordinatentransformation $\xi_j := \phi_j - d$, $\nu_j = \psi_j - c$ und $w := (\xi, \nu)$ verlagern wir die stationäre Lösung in den Ursprung, diese schreibt sich dann $w^s = 0$.
Als nächstes linearisiert man das System (2) um $w^s = 0$ und erhält daraus ein System $\dot{w} = Mw$, mit einer von den Parametern $\beta := V'(d)$, $\gamma := \alpha F(d)$ und $\tau := T(d)$ abhängigen Matrix $M(\beta, \gamma, \tau)$. ( Im Endeffekt hängt die Matrix $M$ also sowohl von der Wahl der Funktionen $V$, $T$ und $F$ ab, als auch von den Parametern $\alpha$, $L$ und $N$.) Wie die Matrix im Detail aussieht, soll uns nicht genauer interessieren, sie aufzustellen ist mit einem größeren Aufwand verbunden, wie auch die Berechnung deren charakteristischen Polynoms zum Auffinden der Eigenwerte. Für diese ergibt sich dann letztendlich die Bedingung:

$$\left[\tau\lambda^2 + (\gamma + 1)\lambda + \beta\right]^N = (\gamma\lambda + \beta)^N \tag{2}$$

Man sieht an dieser Stelle schon, dass $\lambda = 0$ immer ein Eigenwert von $M$ ist. Das ist ein Problem, da wir später den Satz von der Hopfbifurkation anwenden wollen, der aber eine nicht singuläre Jakobimatrix voraussetzt. Glücklicherweise steckt aber in dem System (1) redundante Information, die wir eliminieren

können und damit den Eigenwert bei 0:
Alle relativen Geschwindigkeiten müssen in der Summe 0 ergeben, also ergibt die Summe der ersten $N$ Gleichungen $\sum_{k=1}^{N} \dot{\phi}_k = 0$. Daher können wir die $N$-te Gleichung verwerfen und in der $2N$-ten Gleichung $\phi_N = L - \sum_{k=1}^{N} \phi_k$ setzen. Man erhält dadurch ein reduziertes System

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \psi_{j+1} - \psi_j \qquad j = 1,..N-1 \\
\dot{\psi} &= \frac{1}{T(\phi_j)} \left[ V(\phi_j) - \psi_j + \alpha(\psi_{j+1} - \psi_j) F(\phi_j) \right] \qquad j = 1,..N-1 \\
\dot{\psi} &= \frac{1}{T(L - \sum_{k=1}^{N} \phi_k)} \left[ V(L - \sum_{k=1}^{N} \phi_k) - \psi_N + \alpha(\psi_1 - \psi_N) F(L - \sum_{k=1}^{N} \phi_k) \right]
\end{aligned}
$$

Auf dieses System kann man dann die gleiche Vorgehensweise anwenden wie auf das ursprüngliche System und feststellen, dass dessen $(2N-1) \times (2N-1)$ Jakobimatrix die gleichen Eigenwerte hat wie die des ursprünglichen außer der 0.
Nach diesen Vorkehrungen können wir uns der Stabilitttsanalyse der stationären Lösung widmen, uns also anschauen, wie sich Variationen von Parameterwerten auswirken. Zunächst wollen wir dabei versuchen so allgemein wie möglich vorzugehen und uns noch nicht auf konkrete Funktionen $V$, $T$ und $F$ festlegen. Wie schon erwähnt, wollen wir sehen, wie sich die Lösungen des Systems verhalten, wenn wir die Verkehrsdichte verändern. Dazu könnten wir also die sowohl die Anzahl der Fahrer $N$ und die Länge des Kreisverkehrs $L$ variieren. Da eine Änderung von $N$ aber die Dimension des Systems mitändert (und das dann sehr kompliziert wird), halten wir uns an $L$ als Bifurkationsparameter und halten dafür $N$ fest.
Genau interessieren wir uns nun dafür, unter welchen Bedingungen es bei gegebenen $V$, $T$, $F$ und $\alpha$ (und damit $\beta$, $\tau$ und $\gamma$), es kritische Längen $L$ gibt, so dass die stationäre Lösung ihre Stabilität einbüßt. Beziehungsweise, ob solche Bedingungen überhaupt existieren.
Wir suchen also nach Bedingungen, unter denen Eigenwerte aus (2) die imaginäre Achse überschreiten können. Dazu setzen wir $\lambda = i\omega$ in (2) ein.
Ziehen der n-ten komplexen Wurzel führt auf die notwendige Stabilitätsverlustbedingung:

$$
C_k(\frac{L}{N}) := \frac{\tau\beta}{(1 - \gamma(c_k - 1))^2} - \frac{\gamma}{1 - \gamma(c_k - 1)} = \frac{1}{1 + c_k} \tag{3}
$$

unter denen es Lösungen für $\omega$ gibt, so dass .. erfüllt ist. Die Lösungen für $\omega$ sind dann gegeben durch:

$$
\omega_k = \frac{s_k \beta}{1 - \gamma(c_k - 1)}
$$

, wobei $c_k := cos(2\pi k/N)$ und $s_k := sin(2\pi k/N)$ den Realteil, bzw Imaginärteil der k-ten Einheitswurzellösung bezeichnet.

Aufgrund der Annhamen über $V$, $T$ und $F$ ist die Funktion $C_k$ glockenförmig, das bedeutet, sie erreicht den kritischen Wert $\frac{1}{cos(\frac{2\pi k}{N})}$, wenn überhaupt an zwei verschiedenen Längen $L_{1/2}$. Setzt man darüber hinaus für $k = 1$ unter der Annahme von (3) $\lambda(L) := \nu(L) + i\omega(L)$ in (2) ein, stellt man fest, dass $\nu'(L_{1/2}$
Unsere stationäre Lösung wird also zunächst instabil und dann wieder stabil. Für die Länge $L_1$, die den Stabilitätsverlust kennzeichnet, sind darüber hinaus noch die Bedingugen für eine Hopfbifurkation erfüllt.

Mann kann aus der Eigenwertbedingung noch einen anderen verblüffenden Aspekt abgewinnen. Löst man nämlich .. nach $\tau$auf, erhält man eine Funktion $\tau(L, N, \alpha)$, die $\tau$ an den Stabilitätsverluststellen beschreibt:

$$\tau(L, N, \alpha) = \frac{(1 + 2\alpha F(L/N))[1 + \alpha F(L/N)(a - cos(2\pi/N)]}{V'(L/N)(1 + cos(2\pi/N)}$$

Für festes $N$ und $\alpha$ ist das eine Funktion von $L$ mit $lim_{L\to 0} = \infty$ und $lim_{L\to\infty} = \infty$.
Außerdem gilt $fracd\tau d\alpha > 0 \; \forall L, N$.
Dies kann man folgendermaßen interpretieren: da $\tau = T(L/N)$ beschränkt durch $T_max$ beschränkt ist, gibt es nur einen Bereich für $L$ in dem die Instabilitätsbedingung überhaupt eintreten kann. Mit wachsendem $\alpha$ passiert das bei immer größeren $\tau$. Das heißt der Bereich für $L$, für den die Bedingung erfüllt sein kann schrumpft.
Die Aggressivität verbessert also das Stabilitätsverhalten der stationären Lösung.

# 3 Ergebnisse der numerischen Simulation

Für eine globale Stabilitätsanalyse wird das System (1) für verschiedene Parameter $\alpha$ sowie für verschiedene Reaktionsfunktionen $T$ numerisch gelöst. Dabei stellt man fest:

- Wie bereits analytisch festgestellt, hat ein größeres Gewicht auf die Aggressivität positive Auswirkungen auf das Stabilitätsverhalten: der Abstand der beiden kritischen Punkte $L_{1/2}$ schrumpft und damit der Bereich im Parameterraum, in dem die periodischen Lösungen auftreten.
- Außerdem verbessert sich für größere $\alpha$ das Simulationsverhalten in dem Sinn, dass weniger unphysikalische Lösungen (d.h. Lösungen mit negativen Abständen) produziert werden.
- Kleinere Reaktionszeiten und Reaktionsfunktionen, die schneller sättigen haben positiven Einfluss auf das Stabilitätsverhalten.

# 4 Anhang: Hopfbifurkation

Es wird ein kurzer Abriss über das Phänomen der Bifurkationen gegeben, speziell wird der Satz von der Hopfbifurkation ohne Beweis angegeben. Für eine ausführliche Darstellung sei z.B. auf Guckenheimer & Holmes verwiesen.

## 4.1 Bifurkationen: Begriffsbildung

Man interessiert sich für das qualitative Verhalten (wie Auftreten oder Stabilität von Fixpunkten oder periodischer Orbits) von Familien von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f_\mu(x) \tag{4}$$

in Abhängigkeit des Parameters $\mu$. Bei einem nichtlinearen System kann es dabei in der Nähe eines Parameterwertes $\mu_0$ zu einer schlagartigen Veränderung in dessen Fluss $\phi$ kommen. Ein solches Phänomen nennt man Bifurkation und den Wert $\mu_0$ nennt man dan einen Bifurkationspunkt.

**Beispiel: Heugabelverzweigung**

Betrachte die Familie:

$$\dot{x} = F_\mu(x) := x(\mu - x^2)$$

Die Fixpunktlösungen sind offensichtlich $x_1 = 0, \forall t$ und $x_{2/3} = \pm\sqrt{\mu}$, wobei $x_{2/3}$ natürlich nur für $\mu > 0$ existiert.
Linearisieren an der Stelle $x$ ergibt:

$$DF_\mu(x) = \mu - 3x^2$$

Für die Fixpunktlösung $x_1$ sieht man daraus, wegen $DF_\mu(0) = \mu$, dass $x_1$ für $\mu < 0$ stabil ist und für $\mu > 0$ instabil. Weiter findet man für $\mu > 0$:

$$DF_\mu(\sqrt{\mu}) = -2\mu \ < 0$$

Also sind die Lösungen $x_{2/3}$ stabil.

### 4.1.1 Hopfverzweigung

Betrachte das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x\mu(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y\mu(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(0,0)$ immer Fixpunktlösung für alle $\mu$. Die Jakobimatrix des Systems ist

$$\begin{pmatrix} \mu - 3x^2\mu - y^2\mu & -1 - 2xy\mu \\ 1 - 2xy\mu & \mu - \mu x^2 - 3y\mu \end{pmatrix}$$

$DF(0)$ ist dann:

$$\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

Das charkteristischen Polynom $(\mu-\lambda)^2+1$ liefert die Eigenwerte:

$$\lambda_{1/2} = -\mu \pm \sqrt{2\mu^2 - 2(\mu+1)}$$

Man beobachtet, dass die Eigenwerte an der Stelle $\mu = 0$ über die imaginäre Achse wandern. Es folgt also, dass $x(t) = (0,0)$ für $\mu < 0$ eine stabile Lösung ist, und für $\mu > 0$ eine Instabile. Schreibt man das System um in Poloarkoordinaten $(x,y) = (rcos(\phi), rsin(\phi))$, erhält man:

$$\begin{aligned} r\dot{cos}(\phi) &= -rsin(\phi) + \mu r\, cos(\phi)(1-r^2) & (5)\\ r\dot{sin}(\phi) &= rcos(\phi) + \mu r\, sin(\phi)(1-r^2) & (6) \end{aligned}$$

Durch Setzen von $(6)cos(\phi) + (7)sin(\phi)$ und $-(6)sin(\phi) + (7)cos(\phi)$ erhält man die entkoppelten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r(1-r^2)\\ \dot{\phi} &= 1 \end{aligned}$$

Man sieht daran, dass sich die Lösungen des radialen Anteils genauso verhalten wie die Lösungen der Heugabelgleichung, während die Winkelgeschwindigkeit konstant ist. Das Bifurkationsdiagramm ist also eine rotierende Heugabel. Statt der stabilen Fixpunktlösungen $x(t) = \pm\sqrt{\mu}$ der Heugabel für $\mu > 0$, hat man hier stabile Kreisbahnen mit Radius $\pm\sqrt{\mu}$.

## 4.2 Satz von Hopf

In dem vorgestellten Modell kommt es bei durch Variation der Länge des Kreises $L$ zur Hopfbifurkation. Bei diesem Verzweigungstyp ist der Übergang von einer stabilen in eine instabile Ruhelage gekennzeichnet durch das Auftreten periodischer Orbits. Im Allgemeinen passiert dabei folgendes:

Sei $\dot{x} = f_{/mu}$ eine gewöhnliche Parameterabhängige Differentialgleichung mit $f_\mu(0) = 0$. $A(\mu) = D_x f_\mu(0)$ sei eine Linearisierung des Systems bei 0.
Die Matrix $A(\mu)$ habe ein paar komplex konjugierter Eigenwerte $\pm i$, sowie keien Eigenwerte der Form $ni$, $n \in \mathbb{N}$ und 0. Ferner seien $\tau(\mu) = \alpha(\mu) \pm \beta(\mu)$ eine Fortsetzung der Eigenwerte $\pm i$ mit $\alpha'(\mu) \neq 0$.
Dann gibt es in jeder Umgebung von $(x,\mu) = (0,0)$ periodische Orbits.

## Quellenverzeichnis


- I.Gasser, G. Sirito, B. Werner: „Bifurcation Analysis of a class of 'car following' traffic models“(Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, 2003)
- I.Gasser, T.Seidel, G. Sirito, B. Werner: „Bifurcation Analysis of a class of 'car following' traffic models II: variable reaction times and aggressive drivers“(Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, 2004)
- Roland Gunesch: Skript „Gewöhnliche Differentialgleichungen“(Hamburg 2006)
http://www.math.uni-hamburg.de/home/gunesch/Vorlesung/SoSe2006/Vorl_ODE/Skript/ode.pdf


Für eine tiefergehende Behandlung von Bifurkationen sei zudem auf


- Guckenheimer & Holmes: „Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields“(Springer 1983)


verwiesen.