Seminar zu
Geometrie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen
Der Satz von Poincaré-Bendixson

bearbeitet von Rodrigo Menendez

Zusammenfassung Fragen des Langzeitverhaltens und der Stabilität spielen in den Naturwissenschaften und der Technik von jeher eine besondere Rolle und sind eng mit der Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen verbunden. Viele neue Ideen und Methoden zu dieser Problematik lieferte Henri Poincaré.
In diesem Text wollen wir ein von Poincaré ursprünglich aufgestellten Satz vorstellen, den Satz von Poincaré-Bendixson.

1. Einführung

Wir wollen autonome Differentialgleichungen betrachten, die Flüsse im $\mathbb{R}^2$ erzeugen. Dabei steht ein berühmter Satz im Mittelpunkt unseres Interesses, der nach dem französischen Mathematiker Henri Poincaré und dem schwedischen Mathematiker Otto Bendixson benannt wurde.
Die Kernaussage dieses Satzes ist, dass bei geeigneten topologischen Voraussetzungen die Existenz eines periodischen Orbits sichergestellt werden kann, d.h. keine unvorhersehbaren Veränderungen der Lösungen zu erwarten sind (Chaos). Diese Tatsache hat weitreichende Konsequenzen z.B. für die Hamiltonschen Systeme, die in der Mechanik eine wichtige Rolle spielen.

2. Grundlegende Begriffe und Bemerkungen

Im Folgenden wollen wir grundlegende Definitionen einführen, die wir benötigen um den Satz von Poincaré-Bendixson zu formulieren. Folgerungen oder weitere Definitionen werden wir dann da einführen, wo wir sie brauchen.

Dazu seien
• X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$
und $f \in C^1(X, \mathbb{R}^2)$

Wenn wir eine autonome Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f(x)$ betrachten, ist es angebracht die Abbildung f als ein Vektorfeld auf X zu interpretieren.
Während ein Fluss auf X eine Schar von Kurven erzeugt, stellt die sog. Flusslinie dann eine Parametrisierung einer einzigen Kurve in X dar. Und an jedem Punkt des Weges können wir wegen des Vektorfeldes einen Tangentialvektor anheften.

2.1 Definition: Es seien $J(x) := (t^-(x), t^+(x))$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $\Omega := \{(t,x) \in J(x) \times X\}$. Dann heisst eine Abbildung
$\varphi : \Omega \to X$ *Fluss auf* X, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind
1) Ω ist offen in $\mathbb{R} \times X$.
2) $\varphi \in C^1(\Omega, X)$
3) $\varphi(0, \cdot) = id_X$
4) für $x \in X$, $s \in J(x)$ und $t \in J(\varphi(s,x))$ ist $s + t \in J(x)$, und es gilt: $\varphi(t, \varphi(s,x)) = \varphi(s+t, x)$.

ferner heisst $t^{\pm}(x)$ *positive bzw. negtive Fluchtzeit* und ist Element von $\sup(J)$ bzw. $\inf(J)$ für jedes $x \in X$.

Aus dem Fluss ergibt sich folgende Abbildung:

2.2 Definition: Es Sei φ der von f erzeugte Fluss auf X und $x \in X$ sei fest gewählt. Dann heisst die stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi_x := \varphi(\cdot, x) : J(x) \to X,\ t \mapsto t \bullet x := \varphi(t,x)$$

Flusslinie durch x für jedes $x \in X$ ist

$$\gamma^+(x) := [0, t^+(x)) \bullet x := \{t \bullet x;\ 0 \leq t < t^+(x)\}$$

und

$$\gamma(x) := \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$$

der *positive Halbborbit* bzw. *Orbit* durch x, wenn wir gemäß des positven Orbits den negativen definieren.

2.3 Bemerkung (a) Die Flusslinie stellt eine Parametrisierung einer Kurve $\gamma(x)$ dar.
(b) Für den Fall, dass φ global definiert ist, stellt die Flusslinie eine linksseitige Operation der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf X dar. Daher verwendet man gerne die Bezeichnung $t \bullet x := \varphi_x(t,x)$.
(c) Die Flusslinie φ_x kann als Bewegung des Punktes x mit der Zeit gedeutet werden.
(d)Wir betrachten in dieser Ausarbeitung genau drei Typen von Orbits: die periodischen Orbits, kritische Orbits und doppelpunktfreie Kurven.
(e) Es sei φ der von f erzeugte Fluss auf X und $t \in J(x)$ fest gewählt. Dann heisst die Abbildung

$$\varphi_t := \varphi(t, \cdot) : \Omega_t \to X,\ t \mapsto t \bullet x := \varphi(t,x)$$

Zustandsabbildung durch t. Und $\Omega_t := \{x \in X; (t,x) \in \Omega\}$ ist offen in X. Die Zustandsabbildung ist ein Homöomorphismus und kann als Momentaufnahme zur Zeit t des Gesamtbildes des Flusses interpretiert werden.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist die Invarianz bzw. positive Invarianz. Hierbei handelt es sich um eine qualitative Eigenschaft und ist eng mit dem Begriff der Stabilität verwandt.

2.4 Definition: Eine Teilmenge M von X heisst *positiv invariant*, wenn gilt $\gamma^+(M) \subset M$.

D.h. die Elemente der Menge M bleiben für alle positiven Zeiten unverändert.

Die nächste Definition ist folgendermaßen motiviert: Wenn x ein periodischer Punkt von φ ist z.B. ein kritischer Punkt, so ist intuitiv klar, dass der positive Halborbit auch nach links verlängert werden kann, d.h. auch für negative Zeiten durchlaufen werden kann. Dieser Sachverhalt stellt eine Verallgemeinerung der positiven Invarianz dar:

Die Menge M ist *invariant* , wenn für jedes $x \in M$gilt : $\varphi_x(J) \subset M$.

Ein sehr wichtiges Beispiel einer positiv invarianten Menge liefert folgende Definition:

2.5 Definition: Für jedes $x \in X$ heisst

$$\omega(x) := \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+(t \bullet x)}$$

ω-Limesmenge von x auf X.

2.6. Bemerkungen: (a) Anschaulich besagt die positive Invarianz, dass an jedem Randpunkt die Trajektorie nach innen verläuft.
(b) Sei $D \subset X$ negativ invariant. Dann ist $X \backslash D$ positiv invariant.
(c) Für jedes $x \in X$ mit $t^+(x) = \infty$ gilt: $\omega(x) = \{y \in X; \exists\ t_k \to \infty : t_k \bullet x \to y\}$.

Wir wollen die oben genannten Begriffe anhand eines Beispiels graphisch veranschaulichen:

2.7 Beispiel: Für die autonome Differentialgleichung $\binom{\dot{x}}{\dot{y}} = \binom{y}{-x} + (1 - x^2 - y^2)\binom{x}{y}$ finden wir folgendes qualitatives Verhalten:

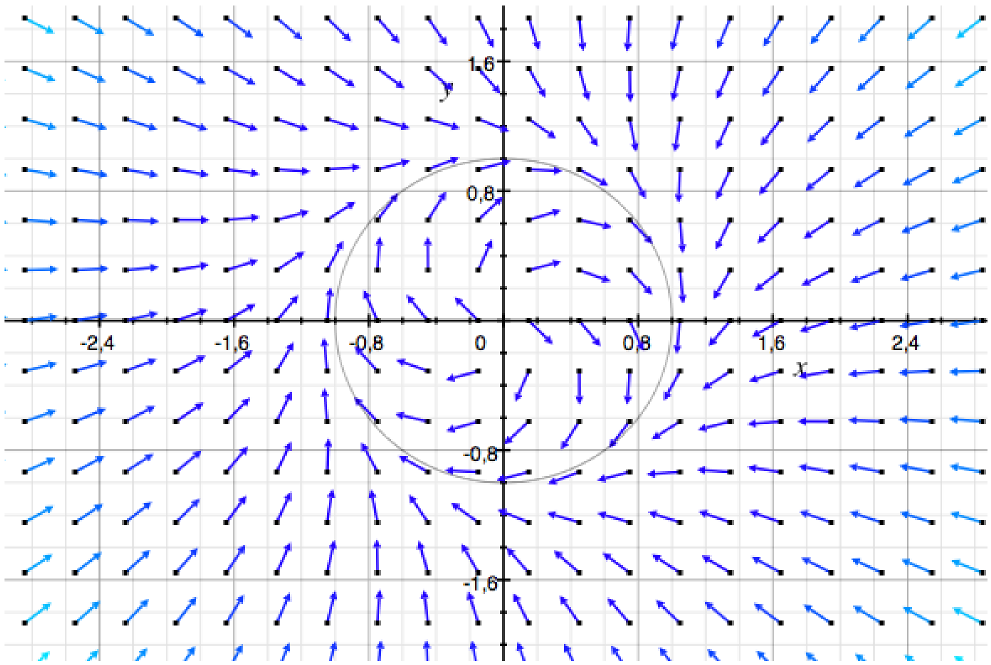

Fig. 1

2.8 Bemerkungen: (a) Anhand Figur 1 sehen wir, dass die Flusslinie eine *orientierungserhaltene* Parametrisierung des Orbits darstellt. Dadurch wird der Orbit mit einer Orientierung versehen nämlich mit der Richtung, in der die Flusslinie den Orbit durchläuft.
(b) Durch die Orbits wird der Phasenraum disjunkt zerlegt, d.h. jeder Punkt von X ist in genau einem Orbit enthalten: $X = \bigcup_{x \in X} \gamma(x)$
(d) Für die ω-Limesmenge finden wir z.B. : $\omega(0) = \{0\}$ und $\omega(x) = \mathbb{S}^1$. Ferner finden wir, dass invariante Mengen keine Startpunkte haben. □

3. Der Satz von Poincaré-Bendixson

Im Folgenden seien
• X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$
und φ der von dem Vektorfeld $f \in C^1(X, \mathbb{R}^2)$ erzeugte Fluss auf X

3.1 Theorem (Poincaré-Bendixson) Wir betrachten einen positiven Halborbit $\gamma^+(x) \subset K$, welcher in einer kompakten Teilmenge $K \subset X$ enthalten ist.
Enthält $\omega(x)$ keinen kritischen Punkt, so ist $\omega(x)$ ein periodischer Orbit.

Bevor wir den Satz beweisen können, benötigen wir noch einige Vorarbeit.
Dazu werden wir mehrere Lemmata voranstellen und so schrittweise zu einem Beweis des Theorems kommen. Wir fangen mit einem wichtigen Hilfselement an, das topologisch motiviert ist und auf Poincaré zurückgeht. Dabei geht man von der Anschauung aus, dass man durch einen Fluss eine Transversale legt.

3.2 Definition: Ist $x_0 \in X$ und ist L_{x_0} eine Gerade (affiner Unterraum) im $\mathbb{R}^2$ durch

x_0, so heisst ein offene Umgebung S von x_0, ein *transversales Segment* von φ in x_0, falls S ein zusammenhängendes Intervall in L_{x_0} ist und für alle $x \in S$ der Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^2$ transversal, (d.h. quer) zu L_{x_0} ist. Und diese Vektoren wollen wir Transversalvektoren nennen.

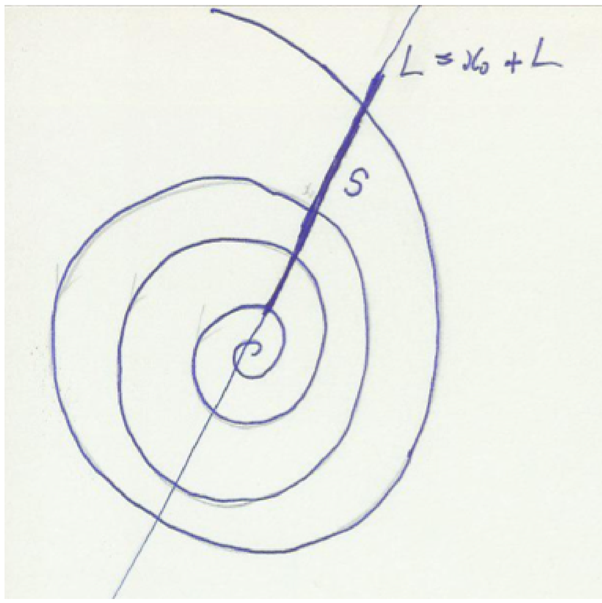

Fig. 2

Im folgenden Lemma wollen wir mit einer wichtigen Charakterisierung transversaler Segmente beginnen:

3.3 Lemma Seien $\dot{x} = f(x)$ eine autonome Differentialgleichung und φ der von dem Vektorfeld f erzeugte Fluss. Ferner sei S ein transversales Segment und (y_i) eine Folge von Punkten, die sowohl in S als auch im Orbit γ enthalten sind.
Wenn die Folge (y_i) auf γ wachsend ist, so ist sie auch auf S wachsend.

Beweis Wie wir bei Bemerkung 2.8 gesehen haben, ist jeder nichtkritische Orbit in natürlicher Weise orientiert. Und wir verstehen unter einer wachsenden Folge auf dem Orbit γ, wenn gilt $y_{k+2} = t \bullet y_{k+1}$ für ein $t > 0$.
Analog ist eine Folge (y_k) wachsend auf einer Geraden $L \subset \mathbb{R}^2$, wenn $y_k - y_0 = t_k(y_1 - y_0)$ für $k = 2, 3, 4, ...$ mit einer wachsenden Folge $t_k \geq 1$ ist.

Wenn wir den Schnitt eines Orbits γ und der Transversalen S bilden, so kann man zeigen, dass der Schnitt $\gamma \cap S$ endlich viele Elemente besitzt.
Betrachten wir einmal drei Punkte $y_k,\ y_{k+1},\ y_{k+2} \in \gamma \cap S$, die auf demselben Orbit liegen und zwar derart, dass y_{k+1} der erste Punkt nach y_k ist, der das transversale Segment S wieder trifft. Als erstes wollen wir zeigen, dass y_{k+2} nicht zwischen y_k und y_{k+1} liegt.

Dazu sei Γ eine geschlossene Jordansche Kurve bestehend aus dem Teil des Orbits γ von y_k bis y_{k+1} und der Teilmenge T des transversalen Segments S zwischen y_{k+1} und y_k. Aus dem Jordanschen Kurvensatz ergibt sich ferner ein eindeutiges Innengebiet, das wir mit D bezeichnen.

Bei dem transversalen Segment können wir das Verhalten des Flusses untersuchen. Da

T Teilmenge einer Geraden $L_{x_0} = x_0 + L$ ist mit L als eindeutig bestimmter Untervektorraum, sind die Tangentialvektoren genau dann transversal zu S, wenn $f(x) \notin L \cup \{0\}$ für alle $x \in L$. Das bedeutet, dass die Tangentialvektoren stets linear unabhängig zur S-Richtung sind bzw. nicht parallel zu S liegen. Wir zeigen nun, dass alle Transversalvektoren der Transversale stets in eine Richtung zeigen.

Es sei der Transversalvektor an der Stelle $y_{k+1} \in \overline{D}$ nach aussen gerichtet und Element von T_-, der Teilmenge von T mit nach aussen gerichteten Tangentialvektoren. Für alle Punkte y aus T_- finden wir ein geeignetes $\epsilon > 0$, so dass für alle $\tilde{y} \in T$ mit $d(y, \tilde{y}) < \epsilon$ die Vektoren $f(\tilde{y})$ transversal zu S sind d.h. linear unabhängig zur S-Richtung sind. Also ist T_- offen in T. Entsprechend definieren wir die in T offene Menge T_+ mit nach innen gerichteten Tangentialvektoren. Da T nur aus Punkten besteht, dessen Tangentialvektoren transversal zu T sind, können wir sicher schreiben

$$T_- \cup T_+ = T \ ; \ T_- \cap T_+ = \emptyset$$

Wenn wir jetzt berücksichtigen, dass man die Teilmenge T auch als Bild einer Parametrisierung interpretieren kann, so ist T zusammenhängend. Also muss T_+ leer sein, da $y_{k+1} \in T_-$ ist.

Damit besteht T nur aus Austrittspunkten und wegen der Orientierung unserer Flusslinie mit $y_{k+2} = t \bullet y_{k+1}$ für ein $t > 0$, muss $y_{k+2} \in S \backslash T$ sein.

Als nächstes müssen wir klären, ob y_{k+1} unter-oder oberhalb von T liegt. Sei $S \backslash T = I_0 \cup I_1$ die Vereinigung zweier halboffener Intervalle derart, dass gilt
$y_{k+i} \in \partial I_i, \ i = 1, 0$. Wir müssen nun ein ϵ so klein zu wählen, dass sich der Punkt $\epsilon \bullet y_{k+1}$ auf γ nur minimal von y_{k+1} entfernt.

Wir betrachten I_1. Für $y_{k+1} \in \partial I_1$ existiert ein genügend kleines $\epsilon > 0$, so dass $\epsilon \bullet y_{k+1}$ mit I_1 stetig verbunden werden kann, ohne Γ zu treffen. D.h. es gilt $\epsilon \bullet y_{k+1} \in \overset{\circ}{I_1} \subset X \backslash \overline{D}$.
Eine analoge Argumentation führt zu $\overset{\circ}{I_0} \subset \overset{\circ}{D}$.
Somit haben wir gezeigt, dass y_{k+1} zwischen y_k und y_{k+2} auf S liegt.
Durch eine Vollständige Induktion ist das Lemma dann bewiesen. □

Als nächstes wollen wir den Zusammenhang von Limesmengen und transversalen Segmenten untersuchen

3.3 Lemma Seien $\dot{x} = f(x)$ eine autonome Differentialgleichung und φ_x die von dem Vektorfeld f erzeugte Flusslinie. Wir betrachten ein Element $y \in \omega(x)$ mit $x \in X$. Dann hat ein transversales Segment höchstens einen Punkt mit $\omega(x)$ bzw. mit dem Orbit $\gamma^+(y)$ gemeinsam.

Beweis Offensichtlich ist $\gamma^+(y)$ positiv invariant. Dann kann man zeigen, dass $\overline{\gamma^+(y)}$ positiv invariant ist.
Da beliebige Durchschnitte positv invarianter Mengen wieder positv invariant sind, ist $\omega(x) := \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+(t \bullet x)}$ positiv invariant.
Deshalb gilt $\gamma^+(y) \subset \omega(x)$ und es genügt $\omega(x)$ zu betrachten. Wir können also festhalten:

Es seien also $y_1, y_2 \in \omega(x)$ mit $y_1 \neq y_2$ und S ein transversales Segment, mit

$$y_1, y_2 \ \in S \cap \omega(x).$$

Eine wichtige Charakterisierung transversaler Segmente lieferte uns Lemma 3.2
Wenn wir sie verwendeten, so läge es nahe eine Folge in $\gamma(x)$ zu konstruieren, die wachsend ist. Dann könnten wir Lemma 3.2 heranziehen und ein Widerspruch könnte dann z.B. in der Bauart der Folge begründet sein.
Dazu wollen wir zunächst $\omega(x)$ genauer untersuchen.
Intuitiv ist klar, dass die Flusslinien für Ruhepunkte und periodische Orbits, für alle Zeiten existieren. Das bedeutet, dass ein Halborbit oder ein Orbit in irgendeiner Form umrandet werden muss, so dass die Flusslinie die Menge nicht verlassen kann. Und dabei sind auch unendlich weite Grenzen erlaubt.
Man kann zeigen, das dass erfüllt ist, wenn γ^+ Teilmenge einer kompakten Menge d.h. Teilmenge einer beschränkten und abgeschlossenen Menge ist. Die Limesmenge $\omega(x)$ ist aber kompakt, und so finden wir $t^+(x) = \infty$.
Jetzt können wir auf eine wichtige Charakterisierung von $\omega(x)$ zurückgreifen:
Für jedes $x \in X$ mit $t^+(x) = \infty$ gilt: $\omega(x) = \{y \in X; \exists\ t_k \to \infty : t_k \bullet x \to y\}$.

Um es für unseren Beweis brauchbar zu machen, folgende Überlegung: $\omega(x) \subset \mathbb{R}^2$ ist kompakt, und somit folgenkompakt. D.h jede Folge in $\omega(x)$ besitzt eine konvergente Teilfolge. In unseren Fall könnten wir geeignete Teilfolgen konstruieren, welche gegen $y_1, y_2 \in \omega(x)$ bei gleicher Zeitfolge t_k konvergieren.

Dazu seien U_j disjunkte Umgebungen von y_j in X. Dann gibt es eine positive Zeitfolge $t_k \to \infty$ mit $t_{2k+1} \bullet x \in U_1$ und $t_{2k} \bullet x \in U_2$ für $k \in \mathbb{N}$.

Als nächstes untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der Umgebungen der Punkte y_1, y_2 und des transversalen Segments S. Wenn ein Orbit durch einen Punkt y_i den Punkt x_i zur Zeit t trifft, so kann man zeigen, dass dann eine ganze Umgebung um y_i existiert, so dass jeder Punkt aus dieser Umgebung das transversale Segment trifft.

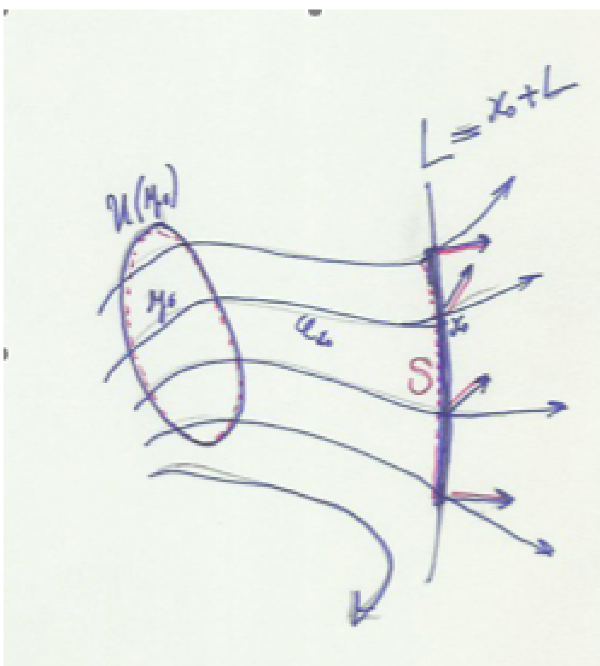

Fig. 4

dazu sei $\tau \in C^1(U_1 \cap U_2, \mathbb{R})$ die (Treffzeit-)Funktion mit $x \in U_j$ mit der Eigenschaft

$$\tau(x) \bullet x \in I_j := U_j \cap S.$$

Wenn wir die beiden letzten Ergebnisse zusammenbringen, erhalten wir

$$a_k := \tau(t_{2k+1} \bullet x) \bullet (t_{2k+1} \bullet x) \in U_1 \cap S$$

und

$$b_k := \tau(t_{2k} \bullet x) \bullet (t_{2k} \bullet x) \in U_2 \cap S$$

Wegen $a_{k-1} < a_k$ *bzw.* $b_{k-1} < b_k$; $\forall k$ können wir eine wachsende Folge auf $\gamma(x)$ definieren, die in S liegt. Es sei dazu

$$a_1, b_1, a_2, b_2, ...$$

eine wachsende Folge.

Und schließlich ist sie wegen Lemma 3.2 auch auf S wachsend, was $a_k \in I_1$ und $b_k \in I_2$ widerspricht. $\square$

3.5 Lemma Seien $\dot{x} = f(x)$ eine autonome Differentialgleichung und φ_x die von dem Vektorfeld f erzeugte Flusslinie. Ferner sei $\gamma^+(x)$ der positove halborbit von φ_x. Ist der Schnitt $\gamma^+(x) \cap \omega(x) \neq \emptyset$, so ist x periodisch.

Beweis Wir müssen zeigen, dass ein $\bar{t} \neq 0$ existiert mit $y = t \bullet x = (\bar{t} + t) \bullet x = \bar{t} \bullet (t \bullet x) = y \ \ \forall\, t$.

Wegen $y \in \gamma^+(x) := \{t \bullet x = y;\ 0 \leq t < t^+(x)\}$ exsistiert ein $t > 0$ mit $t \bullet x = y$.

Um die Periodizität nachzuweisen, müssten wir das Verhalten eines Punktes $y \in \gamma^+(x) \cap \omega(x)$ zu einem späteren Zeitpunkt $\bar{t}$ untersuchen. Dazu könnten wir wieder auf die Charakterisierung von $\omega(x)$ zurückgehen. Bei einer genügend kleinen Umgebung um y könnten wir dann wieder eine Treffzeitfunktion anwenden, so dass wir das transversale Segment einbinden könnten. Aber dazu müssten wir zeigen, dass es ein transversales Segment durch y gibt.

Unter Berücksichtigung der Definition des transversalen Segments als Teilmenge einer Geraden, ist $f(x)$ genau dann zu L transversal, wenn $f(x) \notin L$ ist.

Wenn wir jetzt annehmen, dass x nicht kritisch ist, d.h. es gilt $\gamma^+(x) \neq \{x\}$, finden wir wegen $f(y) = \lim_{t \to 0} \frac{t \bullet x - x}{t}$, dass
$f(y) \neq 0$ für $y \in \gamma^+(x) \cap \omega(x)$ sein muss. Damit können wir festhalten:

Es gibt ein transversales Segment S durch y und nach Lemma 3.3 gilt
$\gamma^+(y) \cap S = \{y\}$.

Sei $U(y)$ eine genügend kleine Umgebung um y. Wegen $y \in \omega(x)$ finden wir ein $s > t$ mit $s \bullet x \in U(y)$.

Ferner sei $\tau \in C^1(U(y), \mathbb{R})$ die (Treffzeit-)Funktion mit $x \in U(y)$ und

$$\tau(x) \bullet x \in U(y) \cap S.$$

Außerdem finden wir wieder

$$\tau(s \bullet x) \bullet (s \bullet x) \in S.$$

Durch Umformungen erhalten wir schließlich $\tau(s \bullet x) \bullet (s \bullet x) = [s + \tau(s \bullet x) - t] \bullet (t \bullet x) = y$, wobei wir $\bar{t} := s + \tau(s \bullet x) - t$ setzen. Und somit gilt

$$\bar{t} \bullet y = t \bullet x = y$$

und dieser Punkt ist nach Lemma 3.3 eindeutig.

Wir wissen also, dass y periodisch ist. Und da y aus x durch Zeitverschiebung hervorgegangen und φ ein Fluss ist, muss auch x periodisch sein. □

Wir wollen jetzt eine zugänglichere Abwandlung der Behauptung unseres Theorems untersuchen:

3.6 Satz Seien $\dot{x} = f(x)$ eine autonome Differentialgleichung und φ der von dem Vektorfeld f erzeugte Fluss. Ferner sei $\gamma^+(x)$ der von der Flusslinie erzeugte positive halborbit. Es seien $K \subset X$ kompakt und $\gamma^+(x) \subset K$.
Enthält $\omega(x)$ einen nichtkritischen periodischen Orbit γ, so ist $\omega(x) = \gamma$.

Beweis Die Limesmenge $\omega(x)$ ist zusammenhängend, d.h. $\omega(x)$ ist nicht als Vereinigung zweier offener, nichtleerer und disjunkter Teilmengen darstellbar.
Das ist plausibel, wenn wir berücksichtigen, dass der positive Halborbit das stetige Bild der Flusslinie eines halboffenen Intervalls ist.

Angenommen die Behauptung wäre falsch, so gelte $\omega(x) \neq \gamma = \gamma(y)$. Was äquivalent zu $\gamma^c = \omega(x) \backslash \gamma \neq \emptyset$ wäre... Hilft uns das weiter ? :
Man kann nun mit dem Begriff des Häufungspunktes eine Beziehung zwischen dem Orbit γ und seinem Komplement γ^c herstellen. Dieser besagt ja, dass es zu jeder Umgebung eines Häufungspunktes z von γ^c (in $\omega(x)$) ein von z verschiedenen Punkt $z' \in (\gamma^c) \backslash \{z\}$ existiert, so dass gilt $z' \in U(z)$.

Da $\omega(x)$ zusammenhängend ist und da γ das stetige Bild des abgeschlossenen Periodenintervalls $[0, T]$ des Punktes y abgeschlossen in $\omega(x)$ ist, gilt $z \in \gamma$. Wir können also festhalten:

Da $\omega(x)$ zusammenhängend ist, enthält γ einen Häufungspunkt z von γ^c.

Wegen $z \in \gamma$ und da γ nichtkritisch ist, gilt $f(z) \neq 0$ und somit gibt es ein transversales Segment durch z.

In jeder Umgebung von z gibt es ein $p \in \gamma^c$. Und wenn p nahe genug bei z gewählt ist, folgt dass $\gamma(p)$ das Segment S schneidet.

Wie wir bereits in Bemerkung 2.5 gesehen haben, ist die Limesmenge $\omega(x)$ invariant und somit enthält es den ganzen Orbit $\gamma(p) \subset \omega(x)$. Also hat S zwei verschiedene Punkte mit $\omega(x)$ gemeinsam, nämlich z und $\tau(p) \bullet p$, was Lemma 3.3 widerspricht. □

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir uns nun dem Beweis des Theorems widmen.

3.7 Beweis des Theorems Wenn wir einmal unser bisher Geleistetes rekapitulieren, können wir folgende Überlegungen anstellen:
Wir gehen von der Behauptung aus, dass $\omega(x)$ ein periodischer Orbit sein soll. Wir müssten uns dazu einen periodischen Orbit $\gamma(y)$ beschaffen, dann könnten wir Satz 3.6 anwenden. Dazu könnten wir auf Lemma 3.5 zurückgreifen, welches uns garantiert, dass y periodisch ist, sofern wir finden, dass es ein z gibt mit $\{z\} = \omega(x) \cap \gamma^+(y)$. Wobei letzteres Lemma 3.4 zugrunde liegt.

Als erstes müssen wir den Zusammenhang von $\omega(x)$ und $\omega(y)$ klären:
Wir wissen, dass $\omega(x)$ nicht leer, kompakt und invariant ist. Somit gibt es ein $y \in \omega(x)$, und es gilt $\gamma(y) \subset \omega(x)$.
Also ist $\omega(y)$ ebenfalls nicht leer, und es gilt insbesondere $\omega(y) \subset \omega(x)$.

Es sei nun $z \in \omega(y)$. Da $\omega(x)$ keinen kritschen Punkt enthält, ist $f(z) \neq 0$ und es gibt ein transversales Segment S durch $z \in \omega(y)$.

Daraus folgt, dass $\gamma^+(y)$ das Segment schneidet. Nach Lemma 3.4 gibt es genau einen Schnittpunkt, der dann offensichtlich gleich z sein muss (da sonst S zwei Schnittpunkte mit $\omega(x)$ hätte) .

Also ist $z \in \omega(x) \cap \gamma^+(y)$, und aus Lemma 3.5 folgt, dass $\gamma(y)$ ein periodischer Orbit ist. Nun ergibt sich die Behauptung aus Satz 3.6 $\square$

Literatur

H. Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen, de Gruyter 1983

H. Amann, J. Escher Analysis I Birkhäuser 2001

Ph. Hartmann, Ordinary Differential Equations. J. Wiley Sons, New York, 1964.