

Stabilität von Planetensystemen und kollisionsfreie Singularitäten

Frank Bruder

12. Februar 2007

1 Das newtonsche n-Körper-Problem

Wir befassen uns mit dem Problem der Bewegung von n Himmelskörpern unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Gravitationswirkung. Da Sterne und Planeten nahezu radialsymmetrische Masseverteilungen besitzen und die Distanzen zwischen Himmelskörpern im Allgemeinen sehr viel größer bleiben als deren Durchmesser, ist es gerechtfertigt, sie als Massenpunkte zu modellieren.

Des Weiteren sind die auftretenden Relativgeschwindigkeiten sehr klein gegenüber der Vakuumlichtgeschwindigkeit und die Gravitation bleibt klein, sodass wir relativistische Effekte vernachlässigen können.

1.1 Bewegungsgleichungen

Für n Massenpunkte mit Massen m_i und Ortsvektoren r_i , $i = 1, \dots, n$, erhalten wir in der newtonschen Physik die Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{r}_i = F_i$$
$$F_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{r_i - r_j}{\|r_i - r_j\|^3}$$

oder

$$\ddot{r}_i = -G \sum_{j \neq i} m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3}, \quad \text{mit } r_{ij} := \|r_i - r_j\|.$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante.

1.2 Das Hamilton-System

Die potentielle Energie des Systems ist

$$V = -G \sum_{j=1}^n \sum_{k>j} \frac{m_j m_k}{r_{jk}} = -\frac{1}{2} G \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{r_{jk}} \quad (1)$$

Die Ableitung von V nach r_i ist

$$\begin{aligned}
 \nabla_i V &= -\frac{1}{2}G \sum_{k \neq i} m_i m_k \nabla_i \left(\frac{1}{r_{ik}} \right) - \frac{1}{2}G \sum_{j \neq i} m_j m_i \nabla_i \left(\frac{1}{r_{ji}} \right) \\
 &= -G \sum_{j \neq i} m_i m_j \nabla_i \left(\frac{1}{r_{ij}} \right) \\
 &= -G \sum_{j \neq i} m_j m_i \left(-\frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} \right) \\
 &= G \sum_{j \neq i} m_j m_i \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3}
 \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass gilt

$$m_i \ddot{r}_i = -\nabla_i V. \quad (2)$$

Die kinetische Energie ist

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|v_i\|^2, \quad \text{mit} \\
 v_i &= \dot{r}_i
 \end{aligned} \quad (3)$$

Damit erhalten wir die Lagrange-Funktion

$$L := T - V = \sum_i \frac{1}{2} m_i \|v_i\|^2 + \frac{1}{2} G \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

Es gilt das Hamilton-Prinzip, wonach die Lösung des Systems ein kritischer Punkt des Funktionals

$$\int L dt$$

ist. Dies liefert und die Hamilton-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \frac{dr_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\
 -\frac{dp_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial r_i}, \quad \text{wobei}
 \end{aligned}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = m_i v_i \quad \text{der Impuls und}$$

$$H = \sum_i v_i^T p_i - L(r, v, t) \quad \text{die Hamilton-Funktion ist.}$$

1.3 Integrale

Das n -Körper-Problem ist beschrieben durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in $3n$ Unbekannten. Um die allgemeine Lösung analytisch berechnen zu können, bräuchten wir also $6n$ Integrale. Es gilt die Impulserhaltung

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \dot{p}_i &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i = \sum_{i=1}^n \left(-G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} \right) \\
 &= -G \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j < i} m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} + \sum_{i=1}^n \sum_{j > i} m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} \right) \\
 &= -G \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j < i} m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} + \sum_{j=1}^n \sum_{i < j} m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} \right) \\
 &= -G \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j < i} m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} - \sum_{j=1}^n \sum_{i < j} m_i m_j \frac{r_j - r_i}{r_{ji}^3} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Der Massenschwerpunkt $(\sum_i m_i)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n m_i r_i$ bewegt sich demnach mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geraden. Es gibt also konstante Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$, sodass

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i = at + b. \tag{4}$$

Dies liefert uns sechs Integrale.

Nun definieren wir den totalen Drehmomentvektor

$$L := \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i \times \dot{r}_i .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 \dot{L} &= \sum_{i=1}^n m_i \underbrace{(r_i \times \dot{r}_i + r_i \times \ddot{r}_i)}_{=0} \\
 &= \sum_{i=1}^n r_i \times F_i \\
 &= -G \sum_i \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{r_i \times (r_i - r_j)}{r_{ij}^3} \\
 &= G \sum_i \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{r_i \times r_j}{r_{ij}^3} \\
 &= 0 \quad , \text{ da } r_i \times r_j = -r_j \times r_i .
 \end{aligned}$$

Mit dem Vektor $L = \text{const.}$ haben wir also drei weitere Integrale.

Für die kinetische Energie $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|v_i\|^2$ des gesamten Systems ist

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^n m_i \langle v_i, \dot{v}_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v_i, F_i \rangle.$$

Und für die Potentielle Energie V gilt

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_i V, \dot{r}_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle -F_i, v_i \rangle = -\dot{T}.$$

Dabei haben wir (2) benutzt. Wegen $\dot{T} + \dot{V} = 0$ ist also die Gesamtenergie $E := T + V$ ebenfalls ein Integral.

Damit haben wir zehn Integrale gefunden. Bruns hat 1887 bewiesen, dass es keine weiteren linear unabhängigen Integrale des n -Körper-Problems gibt, die algebraische Funktionen in $r_1, \dots, r_n, v_1, \dots, v_n$ und t sind.

Bereits für das Zweikörperproblem werden wir also zwei nichtalgebraische Ausdrücke heranziehen müssen.

2 Das 2-Körper-Problem

Wir wollen nun das Zweikörperproblem untersuchen. Da der Massenschwerpunkt sich, wie wir gesehen haben, gleichförmig bewegt, können wir unser Koordinatensystem so wählen, dass der Schwerpunkt im Ursprung ruht. Die Bewegungsgleichungen ändern sich dadurch nicht. Dann haben wir

$$\begin{aligned} m_1 r_1 + m_2 r_2 &\equiv 0 \\ \Rightarrow r_2 &\equiv -\frac{m_1}{m_2} r_1. \end{aligned}$$

Damit können wir r_2 aus der Bewegungsgleichung eliminieren. Zur Abkürzung schreiben wir $r = r_1$, $m = m_1$ und erhalten

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= G m_2 \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3} = -G m_2 \frac{(1 + \frac{m_1}{m_2})r}{\left\| (1 + \frac{m_1}{m_2})r \right\|^3} = -G \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{r}{\|r\|^3} \\ &= -GM \frac{r}{\|r\|^3}, \quad \text{mit } M := \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \end{aligned}$$

Bemerkung 1. Für $m_2 \gg m_1$ ist $M \approx m_2$. Die Massen von Planeten in unserem Sonnensystem sind zum Beispiel viel kleiner als die Masse der Sonne.

Wir definieren den Drehimpulsvektor

$$J := r \times \dot{r}$$

und sehen dass

$$(1 + \frac{m}{m_2})m \cdot J = L$$

konstant ist. Somit ist J konstant. Daraus folgt bereits als erstes Resultat, dass die Bahn in der Ebene senkrecht zu J verläuft.

Nun definieren wir den Achsenvektor

$$A := \frac{1}{GM} J \times \dot{r} + \frac{1}{\|r\|} r .$$

Dann ist

$$\dot{A} = \frac{1}{GM} \left(\underbrace{\dot{J}}_0 \times \dot{r} + \underbrace{J \times \ddot{r}}_{(r \times \dot{r}) \times \ddot{r}} \right) + \left(\frac{\dot{r}}{\|r\|} - \frac{\langle r, \dot{r} \rangle}{\|r\|^3} r \right)$$

Den Ausdruck $(r \times \dot{r}) \times \ddot{r}$ können wir nach dem Entwicklungssatz umformen.

$$\begin{aligned} (r \times \dot{r}) \times \ddot{r} &= \langle r, \ddot{r} \rangle \dot{r} - \langle \dot{r}, \ddot{r} \rangle r \\ &= \langle r, -GM \frac{r}{\|r\|^3} \rangle \dot{r} - \langle \dot{r}, -GM \frac{r}{\|r\|^3} \rangle r \\ &= GM \left(-\frac{\langle r, r \rangle}{\|r\|^3} \dot{r} + \frac{\langle \dot{r}, r \rangle}{\|r\|^3} r \right) \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\dot{A} = \left(-\frac{\langle r, r \rangle}{\|r\|^3} \dot{r} + \frac{\langle \dot{r}, r \rangle}{\|r\|^3} r \right) + \left(\frac{\dot{r}}{\|r\|} - \frac{\langle r, \dot{r} \rangle}{\|r\|^3} r \right) = 0.$$

Auch A ist ein erstes Integral der Bewegung. Wir stellen nun fest, dass gilt

$$\langle A, r \rangle = \frac{1}{GM} \langle J \times \dot{r}, r \rangle + \|r\| .$$

Das Spatprodukt $\langle J \times \dot{r}, r \rangle$ formen wir um zu

$$\begin{aligned} \langle J \times \dot{r}, r \rangle &= \det(J, \dot{r}, r) \\ &= \det(\dot{r}, r, J) \\ &= \langle \dot{r} \times r, J \rangle \\ &= \langle -J, J \rangle = \text{const.} \end{aligned}$$

Und wir sehen

$$\langle A, r \rangle = -\frac{\|J\|^2}{GM} + \|r\| .$$

Für $A = 0$ folgt daraus sofort

$$\|r\| = \frac{\|J\|^2}{GM} = \text{const.}$$

In diesem Fall verläuft die Bahn also auf einem Kreis. Ist $A \neq 0$, so können wir A als Achse verwenden, um in der Bahnebene Polarkoordinaten einzuführen. Man beachte, dass $A \perp J$.

Wir bezeichnen mit φ den Winkel von A zu r und setzen $q := \|r\|$. Des Weiteren schreiben wir $\|A\| =: \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned}\langle A, r \rangle &= \varepsilon q \cos(\varphi) \\ &= -\frac{\|J\|^2}{GM} + q \\ \Rightarrow q &= \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{mit} \quad p := \frac{\|J\|^2}{GM\varepsilon}\end{aligned}$$

Dies ist die Polarkoordinatendarstellung für Kegelschnitte mit dem Ursprung als Brennpunkt (siehe dazu [1], 12.6). $\varepsilon = \|A\|$ ist die numerische Exzentrizität.

Was wir damit gezeigt haben, ist das erste Keplersche Gesetz der Planetenbewegung:

Satz 1 (Erstes Keplersches Gesetz). *Der Planet bewegt sich auf einer Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht; oder allgemeiner auf einem Kegelschnitt, der den Schwerpunkt als Brennpunkt hat.*

Nachdem wir die Form der Bahn kennen, interessiert uns, wie diese zeitlich durchlaufen wird. Dazu führen wir nun cartesische Koordinaten x_1, x_2, x_3 ein indem wir orthonormale Basisvektoren e_1, e_2, e_3 wählen, wobei e_3 kollinear zu J liegen soll. Dann ist automatisch $x_3 = 0$, und wir wissen, dass

$$J = r \times \dot{r} = (0, 0, x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)$$

konstant bleibt. Aus der Analysis planarer differenzierbarer Kurven wissen wir, dass die Sektorfläche, die der Fahrstrahl der Kurve im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ überstreicht, gegeben ist durch die Leibnizsche Sektorformel ([1], 12.5, Satz 4) als

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) dt = \pm \frac{1}{2} \|J\| (t_2 - t_1).$$

Dieser Ausdruck ist direkt proportional zur Zeitdifferenz $\Delta t = t_2 - t_1$, womit wir das zweite Keplersche Gesetz der Planetenbewegung bewiesen haben:

Satz 2 (Zweites Keplersches Gesetz). *Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Wenn wir jetzt speziell die finiten Bahnen, also elliptische Bahnen, betrachten, so gilt für die Zeit P eines Umlaufes, dass $\frac{1}{2} \|J\| \cdot P$ der Fläche E der Ellipse entspricht.

Bezeichnet a die große und b die kleine Halbachse der Ellipse, so gilt auch

$$E = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Unter Verwendung von

$$a = \frac{1}{2} (\|r(\varphi = 0)\| + \|r(\varphi = \pi)\|) = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\|J\|^2}{GM} \frac{1}{1 - \varepsilon^2}$$

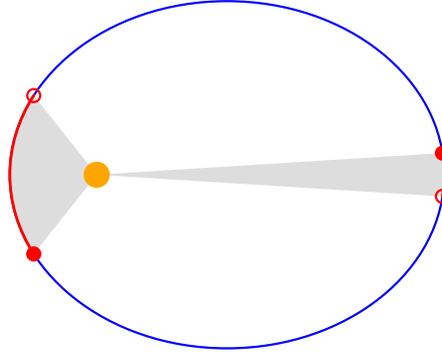


Abbildung 1: Das zweite keplersche Gesetz: Die Sektoren haben gleichen Flächeninhalt. Daher werden beide Bahnabschnitte in gleicher Zeit durchlaufen.

erhalten wir

$$P^2 = 4 \frac{E^2}{\|J\|^2} = 4\pi^2 \frac{1}{\|J\|^2} a^4 (1 - \varepsilon^2) = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

Das ist das dritte Keplersche Gesetz:

Satz 3 (Drittes Keplersches Gesetz). *Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Achsen.*

Bemerkung 2. Man beachte, dass das Zweikörperproblem üblicherweise in einem Koordinatensystem mit der schwereren der beiden Massen im Ursprung betrachtet wird. Dann ist a um einen Faktor $(1 + \frac{m_1}{m_2})$ verschieden von unserem a . Mit $M := m_1 + m_2$ erhält man dennoch die gleiche Formel, wie wir.

Johannes Kepler hat die nach ihm benannten Gesetze nicht etwa durch Betrachtung eines Zweikörperproblems hergeleitet, wie wir es getan haben. Ohne das Newtonsche Gravitationsgesetz zu kennen, das erst Jahrzehnte später entdeckt wurde, hat Kepler die Gesetzmäßigkeiten der Planetenbewegungen durch das Studium von Beobachtungsdaten, vor allem des Mars, erkannt.

Aus diesem Umstand ist bereits zu ersehen, dass die Keplerschen Gesetze, die wir eigentlich nur für das Zweikörperproblem hergeleitet haben, schon eine gute Näherung an die Bahnen der Planeten in unserem Sonnensystem darstellen, was natürlich daran liegt, dass die Gravitationswirkung der Sonne weitaus stärker ist, als die wechselseitige Anziehung zwischen den Planeten. Diese Beobachtung führt zu der Methode, nach der die Bewegungen der Planeten heute tatsächlich vorausberechnet werden:

Sind Ort und Geschwindigkeitsvektor eines Planeten bekannt, so gibt es eine eindeutig bestimmte keplersche Bahn, auf der er die Sonne umlaufen würde,

wenn wir Störungen durch andere Planeten vernachlässigen. Diese Bahn heißt die *oskulierende Bahn* des Planeten zum gegebenen Zeitpunkt. Sie kann durch sechs Parameter beschrieben werden, die man ihre *Bahnelemente* nennt.

Statt nun das Differentialgleichungssystem für r_i und v_i zu integrieren, stellt man Differentialgleichungen für die Bahnelemente auf. Diese lassen sich nicht mehr so einfach hinschreiben, wie das ursprüngliche System. Die rechte Seite wird als Reihenentwicklung angegeben. Dabei genügen aber schon wenige Terme, um genauere Ergebnisse zu erhalten, als mit der direkten Methode. Die Gravitation der Sonne bewirkt nämlich in dem neuen System nur, dass die Bahnelemente konstant bleiben, sodass die schwächeren Bahnstörungen der Planeten untereinander genauer untersucht werden können.

3 Das 3-Körper-Problem

Während wir das Zweikörperproblem noch komplett lösen konnten, ist bereits das Dreikörperproblem im Allgemeinen nicht mehr geschlossen analytisch lösbar. Wir wollen uns hier nur mit einem Spezialfall befassen, aus dem wir bereits viel lernen können:

3.1 Das ebene, zirkuläre restringierte Dreikörperproblem

Wir beschränken uns auf restringierte Dreikörperprobleme. Das heißt, wir betrachten einen Körper von vernachlässigbar kleiner Masse, im Modell also einen masselosen Körper, der sich im Gravitationsfeld zweier schwerer Objekte mit Massen M_1, M_2 bewegt, ohne diese zu beeinflussen. Die beiden Körper mit positiver Masse bewegen sich dann also auf ungestörten Keplerbahnen. Nur die Bahn des masselosen Körpers ist noch zu bestimmen.

Zudem wollen wir annehmen, dass sich alle drei Körper nur in einer Ebene bewegen, was zutrifft, wenn sowohl Orts- als auch Geschwindigkeitsvektor des masselosen Partikels zur Startzeit in der Bahnebene des Zweikörpersystems liegen.

Als weitere Einschränkung fordern wir, dass die Bahnen des Zweikörpersystems Exzentrizität Null haben. Die beiden schweren Objekte bewegen sich also mit konstanten Geschwindigkeiten auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

Dieses System lässt sich sehr schön entdimensionalisieren. Als Masseneinheit wählen wir die Gesamtmasse $M_1 + M_2$ des Systems. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{M_2}{M_1 + M_2} && \text{für Masse 2,} \\ 1 - \mu &&& \text{für Masse 1.} \end{aligned}$$

Als Längeneinheit wollen wir den konstanten Abstand zwischen den massiven Körpern verwenden. Indem wir ein rotierendes Koordinatensystem mit dem Schwerpunkt als Ursprung wählen, können wir es dann so einrichten, dass die

schweren Körper in den Punkten

$$\begin{pmatrix} -\mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit Masse } 1 - \mu \text{ und} \\ \begin{pmatrix} 1 - \mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit Masse } \mu$$

verweilen.

Die Einheit für Zeit erhalten wir durch die Forderung, dass die Winkelgeschwindigkeit = 1 sei. Da die Zentrifugalkraft dann gleich dem Abstand vom Schwerpunkt ist und die Anziehung zwischen den Massen gerade die auf sie wirkenden Fliehkräfte aufhebt, folgt daraus, dass damit auch die Gravitationskonstante den Wert 1 hat.

Damit hängt das System nur noch von dem einen Parameter μ ab. Als Bewegungsgleichungen für das masselose Teilchen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\dot{y} \\ -2\dot{x} \end{pmatrix}}_{\text{Corioliskraft}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \nabla \underbrace{\left(\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \right)}_{\text{Gravitationspotential}},$$

wobei

$$\rho_1 := \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \quad \rho_2 := \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-\mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

die Abstände zu den Massen bezeichnen.

Dies können wir umschreiben zu

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \tag{I}$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \tag{II}$$

mit dem um die Fliehkraft erweiterten Potential

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass Ω auf der x -Achse genau drei kritische Punkte besitzt, und zwar einen zwischen den Massen und jeweils einen auf jeder Seite außerhalb. Zudem kann man sich geometrisch klar machen, dass auch in den beiden Punkten, die mit den Massen jeweils ein gleichseitiges Dreieck bilden, sich Zentrifugalkraft und Schwerkraft gerade aufheben. Diese fünf Gleichgewichtspunkte heißen die *Lagrange-Punkte* des Systems.

Wir erhalten nun ein Integral der Bewegung, wenn wir „(I)· \dot{x} +(II)· \dot{y} “ rechnen. Damit kommen wir auf die Gleichung

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = \underbrace{2\dot{y}\dot{x} - 2\dot{x}\dot{y}}_{=0} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \dot{y},$$

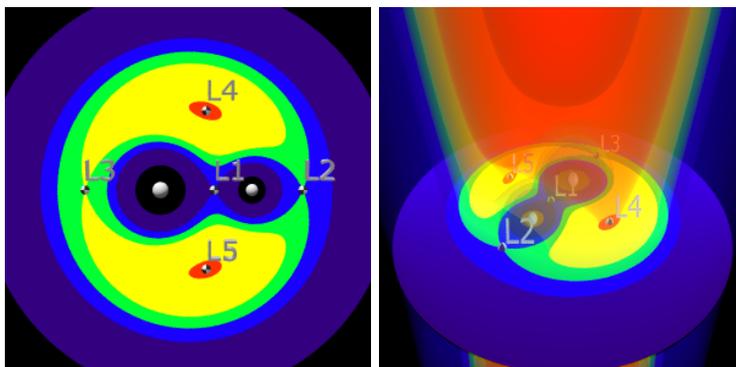


Abbildung 2: Niveaumengen des Jacobi-Integrals und Lagrange-Punkte für $\mu = 0.3$

also

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \right) = \frac{d\Omega}{dt}.$$

Wenn $v = \|(\dot{x}, \dot{y})^T\|_2$ den Betrag der Geschwindigkeit bezeichnet, haben wir also gezeigt, dass

$$2\Omega - v^2 = C = \text{const.} \quad (5)$$

Der Wert C heißt das Jacobi-Integral. Wegen $v^2 \geq 0$ muss nun gelten

$$\Omega \geq \frac{C}{2}$$

Dies liefert uns Bereiche, die nicht erreichbar sind in Abhängigkeit von $C = C(x_0, y_0, v_0)$. Für sehr große C wäre ein Objekt entweder auf eine Umgebung einer der Massen beschränkt, oder es könnte in eine gewisse Umgebung, die beide Massen enthält nicht eindringen (siehe Abb. 2).

Lassen wir C sinken, so wird die erste topologische Veränderung der Niveaumenge auftreten, wenn sich die beiden Umgebungen um die Massen im Lagrange-Punkt L1, zwischen den Massen, verbinden. Für die Raumfahrt hat dies eine ganz praktische Bedeutung: Wenn man etwa von der Erde zum Mond gelangen will, und man möchte dies mit möglichst geringem Energieaufwand erreichen, dann wird die Flugbahn durch den L1-Punkt des Erde-Mond-Systems führen müssen.

Die nächste strukturelle Veränderung wird sein, dass sich der innere und der äußere Bereich vereinen. Sie berühren sich als erstes im L2-Punkt. Das ist der kollineare Lagrange-Punkt jenseits des leichteren Himmelskörpers.

4 Unser Sonnensystem

Nun möchte ich kurz die Erkenntnisse zur Frage nach der Stabilität unseres Sonnensystems darstellen, wie sie in [3] nachzulesen sind.

Eine erste wichtige Beobachtung ist, dass unser Planetensystem in zwei Subsysteme unterteilt werden kann. Die *jovianischen Planeten* (Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun) sind sehr massereich. Sie erfahren keine beachtenswerten Bahnstörungen durch die (wesentlich leichteren) terrestrischen Planeten, weshalb sie separat betrachtet werden können.

Die *terrestrischen Planeten* (Merkur, Venus, Erde und Mars) werden sowohl von dem jovianischen System als auch durch ihre gegenseitigen Störungen beeinflusst. Man könnte als weitere Subsysteme den Asteroidengürtel, den Kuipergürtel oder die Oortsche Wolke betrachten. Alle diese Systeme haben aber keinen wesentlichen Einfluss auf die Bahnen der Planeten.

Für die terrestrischen Planeten zeigt sich, dass diese, gemessen an ihrer Gravitationswirkung, sehr große Abstände zueinander einhalten. Zwar sind die Distanzen im Äußeren Sonnensystem der jovianischen Planeten größer. Jedoch nicht, wenn man sie im Verhältnis zu den Massen betrachtet. Wegen dieser hohen *dynamischen Separation* wird das innere Sonnensystem durch seine internen Störungen nicht instabil.

Des Weiteren sind die Umlaufperioden im inneren Sonnensystem relativ kurz ($\lesssim 2a$; im äußeren Sonnensystem $> 11a$). Während des schnellen Umlaufs werden die Störungen durch die jovianischen Planeten gewissermaßen ausgemittelt und bleiben effektiv klein. Dies sind zwei wesentliche Gründe, die dazu beitragen, dass die Bahnen der terrestrischen Planeten langfristig stabil bleiben, sofern wir von wesentlichen Veränderungen im jovianischen System verschont bleiben.

Was nun das System der jovianischen Planeten angeht, dort treten deutlichere Störungen auf, da ja die dynamische Separation geringer ist. Eine wichtige Rolle spielen dabei Bahnresonanzen: Wenn die Umlaufperioden zweier Planeten im Verhältnis zweier kleiner Ganzzahlen zueinander stehen, kann zwischen ihnen effizient Energie übertragen werden.

Eine auffällige Abweichung der Orte von Jupiter und Saturn von den vorhergesagten, die im 18. Jahrhundert als die *große Ungleichheit* bekannt wurde, konnte 1784 von Pierre-Simon Laplace mit einer 5 : 2-Bahnresonanz erklärt werden. Außerdem gibt es eine 7 : 1-Resonanz zwischen Jupiter und Uranus.

Somit wird die Uranusbahn von Jupiter effektiv gestört, welcher seinerseits mit Saturn in Resonanz steht. Für diese Konstellation zeigen Murray und Holman [4], dass die Bahn des Uranus sich chaotisch verhält, also auf langen Zeitskalen nicht vorhersagbar ist.

Unter Verwendung eines stochastischen Modells, können sie aber immerhin die Zeitskala angeben, in der Uranus Gefahr läuft, eine nahe Begegnung mit Saturn zu erfahren, was notwendig zu wesentlichen Bahnänderungen führt, bis hin zur Möglichkeit, dass ein Planet aus dem Sonnensystem herauskatapultiert wird. Die Zeitskala hierfür beträgt 10^{18} Jahre. Da die Gesamtbrenndauer der Sonne sich auf 10^{10} Jahre beläuft, kann man also sagen, dass unser Sonnensystem insofern stabil ist, als dass die Planetenbahnen über die Lebenszeit der Sonne hinweg in der Nähe ihrer jetzigen Positionen bleiben.

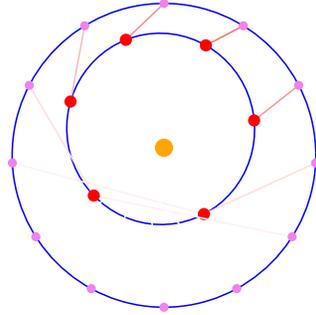


Abbildung 3: Eine 2 : 1-Bahnresonanz. Während eines Umlaufs des äußeren Planeten, macht der innere Planet zwei Umläufe. So begegnen sie sich wieder unter den gleichen Bedingungen.

5 (Kollisionsfreie) Singularitäten

Eine Singularität ist ein Zeitpunkt t^* in dem die Lösung nicht fortsetzbar ist. Im newtonschen n -Körperproblem treten Singularitäten offensichtlich nur auf, wenn $\min_{i \neq j} r_{ij} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow t^*$. Dann geht $\max_i \ddot{r} \rightarrow \infty$.

Die Modellannahmen, dass die Körper im Verhältnis zu ihren Abständen kaum Ausdehnung besitzen und dass relativistische Effekte vernachlässigbar sind, werden in solch einem Fall zwangsläufig verletzt. Darum sind Singularitäten keine physikalischen Erscheinungen. Sie treten nur im Modell auf.

Kollisionen sind Singularitäten. Es stellt sich aber die Frage, ob dies die einzigen Singularitäten sind. Es wäre etwa vorstellbar, dass $r_{\min} := \min_{i \neq j} (r_{ij}(t))$ in einer Weise oszilliert, sodass

$$\liminf_{t \rightarrow t^*} r_{\min}(t) = 0 \quad \text{während}$$

$$\limsup_{t \rightarrow t^*} r_{\min}(t) > d > 0.$$

Mit

$$\Delta_{ij} := \{r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}^3)^n \mid r_i = r_j\},$$

$$\Delta := \bigcup_{i < j} \Delta_{ij} = \{r \mid \text{Rechte Seite ist nicht definiert}\}$$

schreibt sich dies als:

$r(t_k) = (r_1(t_k), \dots, r_n(t_k))$ läuft gegen Δ für eine Folge $\{t_k\}$ mit $t_k \rightarrow t^*$ aber nicht für jede solche Folge.

Painlevé hat gezeigt, dass dieses Szenario nicht möglich ist:

Satz 4 (Painlevé). *Das newtonsche n -Körper-Problem hat genau dann eine Singularität in $t = t^*$, wenn $r(t) \rightarrow \Delta$ für $t \rightarrow t^*$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine Lösung r , wie sie oben beschrieben ist. Wegen $\limsup_{t \rightarrow t^*} (r_{\min}(t)) > d > 0$ gibt es dann eine Folge $\{t_k\}$ mit $t_k \rightarrow t^*$, sodass $\forall k, i, j, i \neq j : r_{ij}(t_k) \geq d$.

Dann gilt aber für die potentiell Energie

$$V(t_k) \geq -G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{d} \geq -\frac{G}{d} \sum_{i < j} m_i m_j.$$

Wegen des Energieerhaltungssatzes liefert uns dies eine obere Schranke für die kinetische Energie $T \leq K$, wobei K nur von d abhängt. Damit ist

$$\|\dot{r}_j\|^2 \leq \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{r}_i\|^2 = \frac{2}{m_j} T \leq \frac{2}{m_{\min}} K \quad \text{in } t = t_k \text{ für alle } j, k.$$

zudem ist

$$\|\dot{v}_j\| = \left\| G \sum_{i \neq j} m_i \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3} \right\| \leq G \sum_{i \neq j} m_i \frac{1}{r_{ij}^2} \leq \frac{G}{d^2} \sum_{i=1}^n m_i.$$

Wegen dieser Schranken und weil die rechte Seite der Bewegungsgleichung in einer Umgebung von $(r(t), v(t))$ mit $r_{\min}(t) \geq d$ Lipschitzstetig ist, garantiert uns der Standard-Existenzsatz die Existenz der Lösung auf dem Intervall

$$[t_k - \delta, t_k + \delta],$$

mit einem δ , das nur von d und der Gesamtenergie E abhängt, nicht aber explizit von t . Wählen wir also k hinreichend groß, sodass $t^* - t_k < \delta$, so steht diese Aussage im Widerspruch zur Annahme, dass t^* eine Singularität sei. \square

Wie in Abbildung 4 angedeutet, schließt dies aber noch nicht aus, dass $r_{\min} \rightarrow 0$ möglich ist, ohne dass ein einziger Abstand gegen Null konvergiert.

Nun wollen wir endlich den Begriff Kollision, den wir schon vorher verwendet haben, formal definieren.

Definition 1. Eine Singularität zur Zeit t^* heißt eine *Kollision*, wenn es ein $q \in \Delta$ gibt, sodass $r(t) \rightarrow q$ für $t \rightarrow t^*$. Andernfalls heißt die Singularität *kollisionsfrei*.

Zur weiteren Untersuchung führen wir zwei Größen ein: Sei

$$I := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \|r_j\|^2,$$

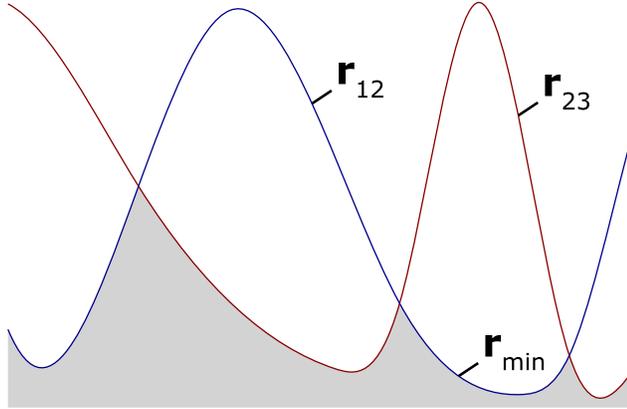


Abbildung 4: Oszillatorisches Verhalten, bei dem der Minimalabstand gegen Null geht

wobei die Ortsvektoren r_j vom Schwerpunkt aus angegeben werden. Damit ist \sqrt{I} ein Maß für r_{\max} , wie folgende Ungleichungen zeigen.

$$\frac{1}{2}m_{\min}r_{\max}^2 \leq I \leq \frac{1}{2}n \cdot m_{\max}r_{\max}^2.$$

Die zweite Größe ist

$$U := \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = -\frac{1}{G}V.$$

U^{-1} ist ein Maß für r_{\min} , denn

$$m_{\min}^2 \frac{1}{r_{\min}} \leq U \leq n \cdot m_{\max}^2 \frac{1}{r_{\min}}.$$

Es gilt

$$\ddot{I} = \sum_{i=1}^n (m_i \|v_i\|^2 + \langle r_i, F_i \rangle) = \dots = 2E - V = 2E + G \cdot U,$$

wobei $E = \text{const.}$ die Energie bezeichnet. Für $r_{\min}(t) \rightarrow 0$, also $U \rightarrow \infty$ folgt daraus $\ddot{I} \rightarrow \infty$. Insbesondere $\ddot{I} > 0$ für t hinreichend groß. daraus folgt $I \rightarrow A$, $A \in [0, \infty]$ für $t \rightarrow t^*$.

Im Fall $A = 0$ hätten wir eine Kollision sämtlicher Partikel im Massenschwerpunkt. Eine kollisionsfreie Singularität erfordert also $A > 0$ und somit, dass r_{\max} von Null weg beschränkt ist für $t \rightarrow t^*$.

Mit der Dreiecksungleichung hat Painlevé daraus folgern können, dass jedenfalls im Dreikörperproblem Kollisionen die einzig möglichen Singularitäten sind.

Ein weiterer wichtiger Beitrag gelang von Zeipel, der zeigen konnte, dass $A < \infty$ ausgeschlossen ist. Also:

Satz 5 (von Zeipel). *Eine kollisionsfreie Singularität tritt genau dann zur Zeit t^* auf, wenn $I \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow t^*$.*

Die Frage lautet also, ob es Anfangsbedingungen gibt, sodass die Partikel sich in endlicher Zeit beliebig weit entfernen. Dazu stellen wir ein paar Überlegungen an:

Ein Partikel, das sich sehr weit von den anderen entfernt, ist nur noch schwachen Beschleunigungen ausgesetzt. Um in endlicher Zeit beliebig weit zu kommen, sind hingegen beliebig große Beschleunigungen nötig.

Damit ein Partikel in endlicher Zeit beliebig weit transportiert wird, muss es unendlich viele beliebig nahe Begegnungen mit anderen Partikeln haben.

Da der Schwerpunkt unbeweglich bleibt, gilt, dass, wenn ein Partikel weit entfernt ist, mindestens ein Zweites in die entgegengesetzte Richtung driften muss.

Wir brauchen also mindestens zwei Partikel, die sich beliebig weit entfernen. Zudem brauchen wir mindestens ein drittes Teilchen, das den beiden abwechselnd beliebig nahe kommt. Und wegen $r_{\min} \rightarrow 0$ kommen wir nicht ohne ein viertes Partikel aus.

Dass kollisionsfreie Singularitäten im Vierkörperproblem tatsächlich möglich sein könnten, wird durch eine 1975 von Mather und McGehee vorgestellte Konstruktion im kollinearen Vierkörperproblem nahegelegt. Bei dieser häufen sich Binärkollisionen, die als elastische Stöße behandelt werden, in einer Weise, so dass die Lösung in endlicher Zeit unbeschränkt wird.

Der *elastische Stoß* ist dadurch definiert, dass die Energieerhaltung (in diesem Fall für die Summe von kinetischer und potentieller Energie) und die Impulserhaltung gewahrt bleiben.

Dass diese Lösung mit unendlich vielen Kollisionen die Existenz einer Lösung mit einer *kollisionsfreien* Singularität vermuten lässt, liegt daran, dass Beinahe-Kollisionen zweier Partikel (dabei ergeben sich sehr lang gestreckte elliptische oder hyperbolische Bahnen) als Grenzfall einen elastischen Stoß ergeben. Es ist also nicht weit hergeholt, in der Nähe der Mather-McGehee-Konstruktion eine Lösung ohne Kollisionen zu suchen. Dieser Ansatz konnte für $n = 4$ aber noch nicht zur Lösung geführt werden.

Für das Fünfkörperproblem hat Xia die Existenz einer Lösung mit einer kollisionsfreien Singularität gezeigt. Um diese Konstruktion zu verstehen, wollen wir uns zunächst mit einem Spezialfall des Dreikörperproblems beschäftigen.

5.1 Das Sitnikov-Problem

Wir denken uns zwei Körper gleicher Masse, die einander umkreisen. Wenn wir einen dritten Körper auf der Geraden platzieren, die durch den Schwerpunkt des Binärsystems und senkrecht zu dessen Bahnebene verläuft, und ihm einen Geschwindigkeitsvektor geben, der ebenfalls senkrecht zur Bahnebene liegt, dann ist es leicht einzusehen, dass sowohl der dritte Körper als auch der Schwerpunkt

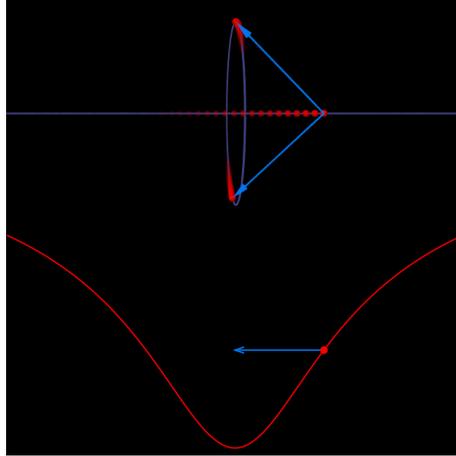


Abbildung 5: Zirkuläres restringiertes Sitnikov-System und Potential.

des Systems sich für alle Zeit auf besagter Gerade bewegen. Ein solches System heißt ein Sitnikov-System.

Zum besseren Verständnis betrachten wir zunächst das restringierte System, in dem das Partikel auf der Achse masselos ist. Hat das Binärsystem zudem die Exzentrizität $\varepsilon = 0$, so ist das Gravitationspotential auf der Achse nicht von der Zeit abhängig (siehe Abb. 5). Das qualitative Verhalten der Lösung ist in diesem Fall leicht zu bestimmen. Für $\varepsilon > 0$ sieht das anders aus.

Betrachten wir nun ein stark exzentrisches Binärsystem und lassen das dritte Partikel so in das System fallen, dass es die Bahnebene kurz vor dem Zeitpunkt der engsten Annäherung erreicht. Wenn der Radius des Binärsystems sein Minimum annimmt, ist die Gravitationswirkung auf der Achse am stärksten. Zu dieser Zeit hat das dritte Partikel gerade die Bahnebene durchkreuzt. Es wird nun abgebremst und kann unter Umständen auch wieder zurückfallen.

Durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen können wir es dabei einrichten, dass die Annäherung aller drei Partikel beliebig nahe und damit die auftretende Kraft beliebig groß wird. Die Exzentrizität des Binärsystems können wir davon unabhängig wählen. Wegen des zweiten Keplerschen Gesetzes, können wir damit das Maximum der Kraft zeitlich beliebig eng begrenzen. Die zurückziehende Kraft wird also nicht unbedingt ausgeglichen durch die Kraft, die auf das dritte Partikel zu Anfang beim Hineinfallen und nach dem Zurückfallen wirken.

Tatsächlich können wir das System so einstellen, dass das dritte Partikel zurückgeworfen wird, und das mit beliebig hoher Geschwindigkeit. Auch wenn wir den restringierten Fall verlassen, funktioniert dies, wobei die dafür nötige Energie dann natürlich von der Bahnenergie des Binärsystems abgezogen wird.

Bei dieser Konstruktion muss das Timing um so genauer sein, je mehr Energie wir dem dritten Partikel zuspielden wollen.

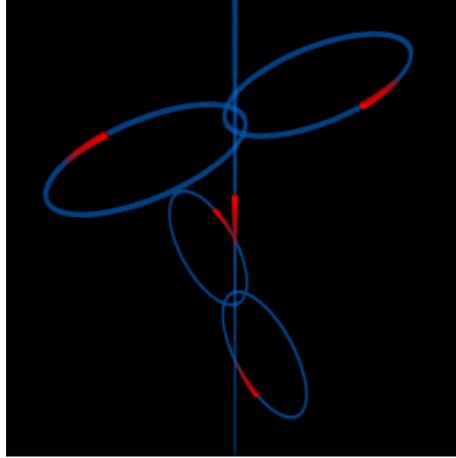


Abbildung 6: Xia-Konstruktion

5.2 Das Theorem von Xia

Xia fügt dem Sitnikov-System ein zweites Binärsystem hinzu, sodass sich beide Binärsysteme das Partikel auf der Achse gegenseitig zuspieren. (s. Abb. 6)

Für dieses System gibt es eine Cantormenge von Anfangsbedingungen für die sich dieses „Zuspieren“ in endlicher Zeit unendlich oft wiederholt. Das ist natürlich nur möglich, weil die Geschwindigkeit des achsialen Partikels beliebig groß werden kann und weil die Binärsysteme dabei Bahnenergie verlieren, wodurch ihre Umlaufperioden kürzer werden.

Beim Zurückwerfen des Zentralpartikels wirkt eine entgegengesetzte Kraft auf das jeweilige Binärsystem. Darum stoßen sich beide Binärsysteme immer weiter voneinander ab. Zur Singularität hin geht der Abstand zwischen ihnen gegen Unendlich.

Der formale Beweis, dass eine solche Bewegung (im Modell) möglich ist, fußt auf dem Verständnis des Verhaltens nahe Dreifach-Kollisionen. Dieses wird in McGehee-Koordinaten betrachtet. Das ist eine Koordinatentransformation, bei der der Raum und die Zeit zur Kollision hin so reskaliert werden, dass das System mathematisch selbst für $r_{\max} = 0$ definiert ist. Während in Standardkoordinaten bei einer Kollision $v \rightarrow \infty$ geht, stellen die Dreifachkollisionen in McGehee-Koordinaten eine invariante Mannigfaltigkeit im Phasenraum dar.

Eine Dreifachkollision entspricht einem hyperbolischen Gleichgewichtspunkt x^* im erweiterten Phasenraum. Als Modell für das Verhalten nahe Dreifachkollisionen wollen wir das System

$$x' = -x \quad , \quad y' = y$$

mit dem hyperbolischen Gleichgewichtspunkt $(0,0)^T$ betrachten. Trajektorien sind in Abb. 7 dargestellt.

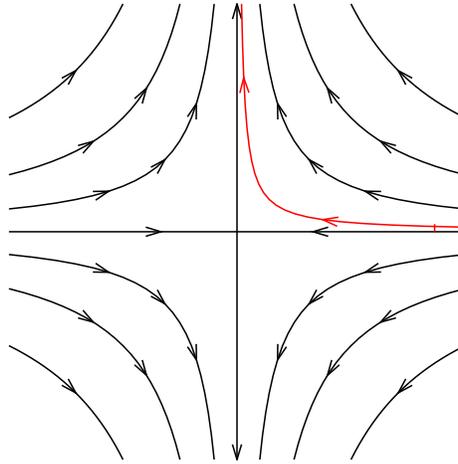


Abbildung 7: Modellsystem

x^* besitzt eine stabile Mannigfaltigkeit. Das ist die Menge von Anfangsbedingungen, die zu einer Dreifachkollision in x^* führen und entspricht der x -Achse im Modellproblem. Wenn wir eine solche Startbedingung wählen und uns dort ein wenig von der stabilen Mannigfaltigkeit entfernen – etwa indem wir dem Binärsystem einen leichten Drehimpuls geben – dann beobachten wir ein Verhalten wie es die rote Trajektorie in Abb. 7 veranschaulicht.

Anfangs wird sich das System ähnlich verhalten, wie unser Ausgangssystem auf der stabilen Mannigfaltigkeit. Das heißt, die Partikel werden sich einander nähern und dabei an Geschwindigkeit zulegen. Doch die Trajektorie entfernt sich exponentiell von der stabilen Mannigfaltigkeit, verfehlt den Gleichgewichtspunkt und nähert sich der instabilen Mannigfaltigkeit (der y -Achse im Modellproblem). Die Partikel streben wieder auseinander. Wie bereits erwähnt, können wir dabei erreichen, dass das Partikel auf der Achse mit beliebig großer Geschwindigkeit ausgestoßen wird.

Es gibt Also nahe der stabilen Mannigfaltigkeit eine Menge A_0 von Anfangsbedingungen für die das Partikel auf der Achse so ausgestoßen wird, dass es das zweite Binärsystem noch vor einem angepeilten Zeitpunkt t_0 erreicht, um eine zweite Beinahe-Dreifachkollision zu erleben. Analog gibt es für die Zweite Annäherung eine Menge A_1 von der aus das Partikel in der nunmehr kürzeren Zeit bis t_0 wieder zum ersten System zurückgeworfen wird.

Wir wählen also aus A_0 die Menge von Startbedingungen $A_0^1 \subseteq A_0$ von der aus wir A_1 treffen. Analog gibt es eine Menge A_2 , die von $A_1^2 \subseteq A_1$ aus erreicht wird und wir wählen wieder die geeigneten Startbedingungen $A_0^2 \subseteq A_0^1$. Dies lässt sich unendlich oft fortsetzen. Dabei ist in jedem Schritt das gleiche Problem für einen kürzeren Zeitraum $t_0 - t$ zu lösen. Also können wir davon ausgehen, dass unsere Mengen A_0^k von selbstähnlicher Struktur sind.

Die Konstruktion ähnelt dem Standardbeispiel einer Cantormenge (Abb. 8),

bei dem in jedem Schritt das mittlere Drittel jedes verbleibenden Intervalls verworfen wird. So wird auch hier

$$A := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_0^k \neq \emptyset$$

eine Cantormenge sein. Jeder Punkt aus A entspricht Anfangsbedingungen, die zu einer kollisionsfreien Singularität zu einem Zeitpunkt $t^* \leq t_0$ führen.

Literatur

- [1] Konrad Königsberger
Analysis 1
Springer-Verlag
- [2] M. Valtonen, H. Karttunen
The Three-Body Problem
Cambridge University Press
- [3] R. Malhotra, M. Holman, T. Ito
Chaos and Stability of the Solar System
Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America
- [4] N. Murray, M. Holman
The Origin of Chaos in the Outer Solar System
- [5] O. Knill
Strange Singularities and Orbits
- [6] D. G. Saari, Z. Xia
Off to Infinity in Finite Time
Notices of the AMS

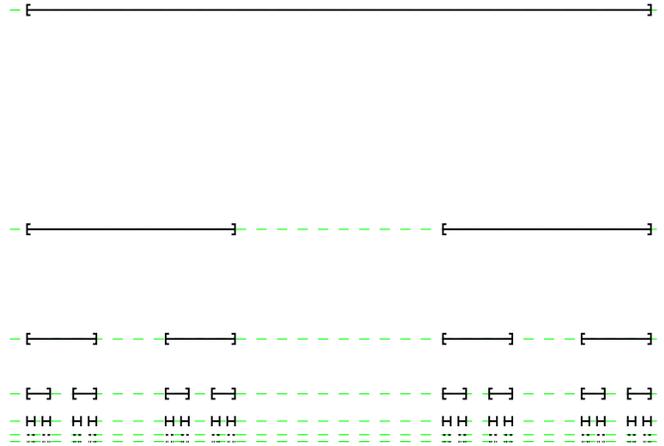


Abbildung 8: Konstruktion der $2/3$ -Cantormenge

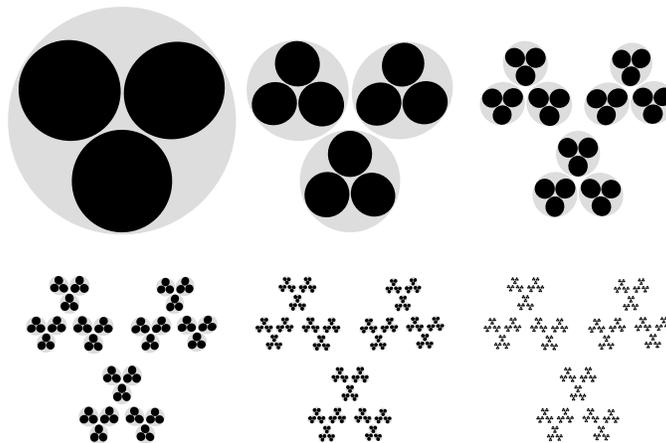


Abbildung 9: Schrittweise Auswahl nach analogen Kriterien. Der Schnitt aller so entstehenden Mengen ist ein Cantor-Staub.