

Relative Ruhelagen bei 0 in Hamilton-Systemen auf Darstellungen

8. Dezember 2015

Notation

G	zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe
\mathfrak{g}	Lie-Algebra von G
V	G -Darstellung
ξ_x	$\frac{D}{Dt} \exp(t\xi)x _{t=0}$ für $\xi \in \mathfrak{g}$, $x \in V$
ω	G -invariante symplektische Form auf V
$H : V \rightarrow \mathbb{R}$	glatte Funktion (die Hamiltonfunktion)
X_H	Hamiltonsches Vektorfeld definiert durch $DH(x) = \omega(\cdot, X_H(x))$
$\mathbf{J} : V \rightarrow \mathfrak{g}^*$	Impulsabbildung, mit $\mathbf{J}^\xi := \langle \mathbf{J}(\cdot), \xi \rangle$ für $\xi \in \mathfrak{g}$ gilt $D\mathbf{J}^\xi(x) = \omega(\cdot, \xi_x)$

Die Gleichung definiert die Impulsabbildung \mathbf{J} bis auf eine Konstante, die für kompakte Gruppen so gewählt werden kann, dass \mathbf{J} äquivariant bezüglich der coadjungierten Darstellung auf \mathfrak{g} ist. \mathbf{J} ist konstant entlang jeder Trajektorie γ von X_H , d. h. $t \mapsto \mathbf{J}(\gamma(t))$ ist konstant.

Definition 1. $x \in V$ heißt *relative Ruhelage*, falls die Trajektorie zu X_H von x im G -Orbit von x liegt.

x ist genau dann eine relative Ruhelage, wenn es ein $\xi \in \mathfrak{g}$ mit $X_H(x) = \xi_x$ gibt. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$D(H - \mathbf{J}^\xi)(x) = 0.$$

ξ wird dann auch als *Geschwindigkeit* von x bezeichnet, wobei die Geschwindigkeit im Allgemeinen nicht eindeutig ist: Die Summe mit einem beliebigen Element aus der Lie-Algebra \mathfrak{g}_x von G_x ist ebenfalls eine Geschwindigkeit von x .

1 Torusdarstellungen

Wir untersuchen nun den Fall $G = T^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, insbesondere am Beispiel $n = 2$. Die Lie-Algebra ist dann $\mathfrak{t}^n = \mathbb{R}^n$ und die Exponentialabbildung $\exp \mathfrak{t}^n \rightarrow T^n$ ist durch die Projektion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ gegeben.

Die irreduziblen Darstellungen T^n über \mathbb{C} sind eindimensional und von der Form

$$\exp(\xi) \mapsto e^{2\pi i \alpha(\xi)} \quad \text{mit } \alpha(\xi) = \langle a, \xi \rangle, \quad a \in \mathbb{Z}^n$$

(mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{R}^n). Dazu erhält man entsprechende symplektische Darstellungen \mathbb{C}_α auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ mit $\omega = \langle \cdot, i \cdot \rangle$.

Für die Darstellungen $V = \mathbb{C}_\alpha$ sind alle Punkte relative Ruhelagen. Wir betrachten nun Darstellungen von T^2 der Form $\mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_\beta$ mit linear unabhängigen α und β . (Falls $n \geq 2$ wird der Kern der Darstellung ausgeteilt.) Die Impulsabbildung für $\mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_\beta$ setzt sich aus den Impulsabbildungen für \mathbb{C}_α und \mathbb{C}_β zusammen:

Auf \mathbb{C}_α gilt

$$D\mathbf{J}^\xi(x) = \omega(\cdot, \xi_x) = \langle \cdot, i \cdot 2\pi i \alpha(\xi)x \rangle = -2\pi \alpha(\xi) \langle \cdot, x \rangle.$$

Also ist $\mathbf{J}(x) = -\pi|x|^2\alpha$ eine mögliche Impulsabbildung. Entsprechend ist auf $\mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_\beta$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_\beta &\rightarrow \mathfrak{t}^2 \\ x = x_\alpha + x_\beta &\mapsto -\pi(|x_\alpha|^2\alpha + |x_\beta|^2\beta) \end{aligned}$$

eine Impulsabbildung. Da α und β linear unabhängig sind, wird der Impuls $\mathbf{J}(x)$ also eindeutig durch die Werte $|x_\alpha|^2$ und $|x_\beta|^2$ bestimmt. Somit sind die Mengen mit demselben Impuls genau die T^2 -Orbits. Da der Impuls entlang von Trajektorien konstant ist, sind also alle Punkte relative Ruhelagen, unabhängig von der Hamiltonfunktion H . (Entsprechendes gilt für T^n und linear unabhängige $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.)

Als nächstes betrachten wir eine beliebige T^2 -symplektische Darstellung V und suchen nach relativen Ruhelagen nahe 0, also nach Lösungen $(x, \xi) \in V \times \mathfrak{t}^2$ der Gleichung

$$D(H - \mathbf{J}^\xi)(x) = 0,$$

für x in beliebig kleinen Umgebungen von 0. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt als notwendige Bedingung für die Existenz von relativen Ruhelagen mit Geschwindigkeit nahe ξ in der Nähe von 0, dass

$$D^2(H - \mathbf{J}^\xi)(0)$$

einen nicht-trivialen Kern hat. Wir untersuchen also die Menge der $\xi \in \mathfrak{t}^2$, welche diese Bedingung erfüllen, dabei beschränken wir uns auf generische Fälle: Nach der Normalformtheorie aus [DM93] gibt es eine Basis, bezüglich der $DX_H(0)$ in Jordanblöcke zu den reellen Anteilen der Summen von verallgemeinerten Eigenräumen der komplexen Eigenwerte $\mu, -\mu, \bar{\mu}, -\bar{\mu}$ zerfällt, so dass diese Summen von Eigenräumen ω -orthogonal zueinander stehen. Uns interessieren nur die Räume zu rein imaginären Eigenwerten. Man kann leicht zeigen, dass im generischen Fall keine Jordankästchen auftreten. Für diesen Fall wird in [DM93] gezeigt, dass der reelle Anteil der Eigenräume zu $\pm ai$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in symplektisch irreduzible T^2 -Darstellungen zerfällt, die als komplexe Vektorräume aufgefasst werden können, auf denen $DX_H(0)$ durch Multiplikation mit einem der Faktoren $\pm ai$ operiert und auf denen es ein invariantes Skalarprodukt gibt, so dass ω der Form $\langle \cdot, i \cdot \rangle$ entspricht. Ohne Einschränkung sei der Faktor gleich a . Jeder dieser Räume ist also von der Form \mathbb{C}_α und

$$D^2H(0)|_{\mathbb{C}_\alpha} = iDX_H(0)|_{\mathbb{C}_\alpha} = -a\mathbb{1}$$

ein Vielfaches der Identität. Für die Impulsabbildung auf \mathbb{C}_α gilt $D^2\mathbf{J}(x) = -2\pi\alpha\mathbb{1}$. (Hier wurde jeweils die quadratischen Formen und die darstellende Matrix identifiziert.) Der Kern $D^2(H - \mathbf{J}^\xi)(0)$ ist genau dann nicht trivial, wenn für ein solches \mathbb{C}_α die Gleichung $2\pi\alpha(\xi) = a$ erfüllt ist, in diesem Fall liegt \mathbb{C}_α im Kern. Die Menge der Lösungen $\xi \in \mathfrak{t}^2$ dieser Gleichung bildet eine Gerade parallel zu $\ker \alpha$. Falls ξ in genau einer solchen Geraden enthalten ist, kann man mit Überlegungen wie im letzten Vortrag oder mit dem äquivarianten Moser-Weinstein-Satz aus [MRS88] zeigen, dass die relativen Ruhelagen nahe 0 mit Geschwindigkeiten nahe ξ einen Zweig aus periodischen Lösungen bilden. (Sie liegen im Fixraum zu $T_\alpha = \ker \vartheta_\alpha$, der aus den symplektisch irreduziblen T^2 -Unterdarstellungen von V der Form \mathbb{C}_β besteht, für die β ein (rationales) Vielfaches von α ist.) Interessant ist also, ob man für ein η im Schnitt von zwei solchen Geraden zusätzliche Lösungen erhält. Wir nehmen dabei an, dass sich nur nicht parallele Geraden schneiden. Es sei also

$$\ker D^2(H - \mathbf{J}^\eta)(0) = \mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_\beta =: V_0$$

mit linear unabhängigen α und β . V_1 sei ein T^2 -invariantes Komplement zu V_0 .

Sei $h(v, \xi) = H - \mathbf{J}^\xi(v)$. Mit dem Lyapunov-Schmidt-Verfahren oder dem Splitting Lemma (vergleiche [MR-O15] oder siehe Anhang) erhält man einen invarianten Keim $g : V_0 \times \mathfrak{t}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und einen äquivarianten Keim $v_1 : V_0 \times \mathfrak{t}^2 \rightarrow V_1$ in $(0, \xi)$, so dass

$$D_V h(v_0 + v_1(v_0, \xi), \xi) = 0 \Leftrightarrow D_{V_0} g(v_0, \xi) = 0$$

und so dass die Ableitungen von der Einschränkung von h auf $V_0 \times \mathfrak{t}^2$ und von g in $(0, \xi)$ bis zur 2. Ordnung übereinstimmen. Wählt man die von der C^2 -Topologie induzierte Quotiententopologie auf der Menge der Funktionskeime in $(0, \xi)$ auf $V_0 \times \mathfrak{t}^2$, dann liegen in jeder offenen Menge keiner der beiden Keime oder beide (die Topologie ist also nicht Hausdorffsch).

Daher liegt es nahe, zu erwarten, dass die Lösungen zu $D_{V_0} g(v_0, \xi) = 0$ sich ähnlich verhalten wie die Lösungen zu $D_V h(v_0, \xi) = 0$ und insbesondere, dass es zusätzlich zu den periodischen Lösungen eine (reell) vierdimensionale Mannigfaltigkeit von relativen Ruhelagen gibt. Die Vermutung wird durch folgende Beobachtung gestützt: Da $h|_{V_0 \times \mathfrak{t}^2}$ eine T^2 -invariante Funktion ist, liegt $D_{V_0} h(x, \xi)$ für $x \in V_0$ im Annihilator $\text{ann}(\mathfrak{t}^2 x)$ von $\mathfrak{t}^2 x$. Die ξ -Ableitung von $D_{V_0} h(x, \xi)$ in einem Punkt $x = x_\alpha + x_\beta \in \mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_\beta$ mit $0 \neq x_\alpha \in \mathbb{C}_\alpha, 0 \neq x_\beta \in \mathbb{C}_\beta$ ist

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{t}^2} D_{V_0} h(x, \xi) &= D_{\mathfrak{t}^2} D\mathbf{J}^\xi(x) : \mathfrak{t}^2 \rightarrow \text{ann}(\mathfrak{t}^2 x) \subset V_0^* \\ &\xi \mapsto -2\pi\alpha(\xi)\langle \cdot, x_\alpha \rangle - 2\pi\beta(\xi)\langle \cdot, x_\beta \rangle. \end{aligned}$$

Da $\text{ann}(\mathfrak{t}^2 x)$ 2-dimensional ist und α und β linear unabhängig sind, ist diese Abbildung invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es auch für jede Abbildung A nahe $Dh|_{V_0}$ von $V_0 \times \mathfrak{t}^2$ nach $\text{ann}(\mathfrak{t}^2 x)$ genau ein $\xi = \xi(A, x)$ mit $A(\xi, x) = 0$.

Auf die Ableitung von g ist dieses Argument aber nicht direkt anwendbar, da g nur ein Keim in 0 ist und 0 in \mathbb{C}_α und \mathbb{C}_β enthalten ist. Solche Probleme lassen sich mit der Theorie zur Transversalität zu Whitney-Stratifizierungen lösen. Auf dieser Theorie baut die Theorie von äquivarianter Transversalität auf, die wir im Folgenden auf das Problem anwenden:

Wir betrachten \mathbb{R} und $\mathfrak{t}^2 = \mathbb{R}^2$ als triviale T^2 -Darstellung und prüfen auf *äquivariante 1-Jettransversalität* (Die Begriffe werden hier wie in [Fie07] verwendet. Die Theorie zur Jettransversalität stammt aus [Bie76]):

Jede T^2 -invariante glatte Funktion auf $V_0 \times \mathfrak{t}^2$ lässt sich als Funktion von r_α^2, r_β^2 und $\xi \in \mathfrak{t}^2$ schreiben, wobei $r_\alpha^2 = |x_\alpha|^2$ und $r_\beta^2 = |x_\beta|^2$ für $x = x_\alpha + x_\beta \in \mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_\beta$. Die partiellen Ableitungen $\partial_\alpha, \partial_\beta$ bezeichnen die Ableitungen nach r_β^2 bzw. r_β^2 einer invarianten Funktion, aufgefasst als Funktion von r_β^2 und r_β^2 .

Es sei

$$\begin{aligned} \vartheta : V_0 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow V_0^* + V_0 \\ \vartheta(x, t) &= t_1 x_\alpha + t_2 x_\beta \end{aligned}$$

und $\Sigma = \vartheta^{-1}(0)$. Σ hat als algebraische Menge eine kanonische Whitney-Stratifizierung, also eine ausgezeichnete Zerlegung in Mannigfaltigkeiten mit Eigenschaften, die ermöglichen, die Sätze aus der Transversalitätstheorie auf diesen Fall zu übertragen. Eine Abbildung ist transversal zu Σ , falls sie transversal zu jedem Stratum ist.

Für die Funktion

$$\begin{aligned} \Gamma_h : V_0 \times \mathfrak{t}^2 &\rightarrow V_0 \times \mathbb{R}^2 \\ \Gamma_h(x, \xi) &= (x, \partial_\alpha h(x, \xi), \partial_\beta h(x, \xi)). \end{aligned}$$

gilt dann $\vartheta \circ \Gamma_h = \nabla h$.

In diesem Fall ist h genau dann T^2 -1-jettransversal zu $0 \in V_0$ in $(0, \xi)$, wenn Γ_h transversal zu Σ ist.

Wir zeigen nun, dass die Einschränkung von h auf $V_0 \times \mathfrak{t}^2$ für jedes $\xi \in \mathfrak{g}$ in $(0, \xi)$ T^2 -1-jettransversal zu 0 ist.

Da für $(x, \xi) \in V_0$

$$\begin{aligned} h(x, \xi) &= H(r_\alpha^2(x), r_\beta^2(x)) - J^\xi(r_\alpha^2(x), r_\beta^2(x)) \\ &= H(r_\alpha^2(x), r_\beta^2(x)) - \pi(r_\alpha^2(x)\alpha(\xi) + r_\beta^2(x)\beta(\xi)) \end{aligned}$$

gilt, ist die ξ -Ableitung von Γ_h unabhängig von Hamiltonfunktion und es ergibt sich

$$\begin{aligned} D_\xi \partial_\alpha h(x, \xi) &= D_\xi \partial_\alpha \mathbf{J}^\xi(r_\alpha^2, r_\beta^2) = -\pi\alpha, \\ D_\xi \partial_\beta h(x, \xi) &= D_\xi \partial_\beta \mathbf{J}^\xi(r_\alpha^2, r_\beta^2) = -\pi\beta. \end{aligned}$$

Da α und β linear unabhängig sind, ist also $D_\xi \Gamma_h(0, \xi)\mathfrak{t}^2 = \{0\} \times \mathbb{R}^2$. Das Bild der totalen Ableitung $D\Gamma_h(0, \xi)$ ist also der ganze Raum $V_0 \times \mathbb{R}^2$. Daher ist $h|_{V_0 \times \mathfrak{g}}$ immer T^2 -1-jettransversal zu $0 \in V_0$ in $(0, \xi)$. Aus der äquivarianten Transversalitätstheorie folgt, dass auch für den Keim g gilt, der bezüglich der C^2 -Quotiententopologie in jeder offenen Umgebung von $h|_{V_0 \times \mathfrak{t}^2}$ enthalten ist, dass g in $(0, xi)$ T^2 -1-jettransversal zu 0 ist. Außerdem gibt es einen äquivarianten Homöomorphismus, der die kritischen Punkte von g und h aufeinander abbildet. Insgesamt folgt, dass es in V eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit von relativen Ruhelagen mit Geschwindigkeit nahe ξ gibt.

Analog kann man für T^n -Darstellungen für beliebige n argumentieren, wenn die Bedingung erfüllt ist, dass $\ker D^2(H - \mathbf{J}^\xi)(0)$ für alle $\xi \in LT^n$ aus Summen $\bigoplus_i \mathbb{C}\alpha_i$ für linear unabhängige α_i besteht. Das ist äquivalent dazu, dass in \mathfrak{t}^n der Schnitt von k der entsprechenden Hyperebenen der Form $\alpha_i(\xi) = a_i$ höchstens die Dimension $n - k$ hat. Das ist eine generische Bedingung an die Eigenwerte von $D^2H(0)$.

2 Folgerung für G -Darstellungen allgemein

Für einen maximalen Torus T einer zusammenhängenden kompakten Gruppe G gilt, dass es für jedes Lie-Algebra-Element $\xi \in \mathfrak{LG}$ ein Element $g \in G$ gibt, so dass $\text{Ad}_g \xi$ in der Lie-Algebra \mathfrak{t} von T enthalten ist. Um die relativen Ruhelagen zu finden, reicht es daher, nach Lösungen der Gleichung

$$D(H - \mathbf{J}^\xi)(x) = 0$$

mit $\xi \in \mathfrak{t}$ zu suchen. Eine G -invariante Funktion H ist insbesondere auch T -invariant. Für jedes ξ , für das $\ker D(H - \mathbf{J}^\xi)(0)$ eine Summe der Form $\bigoplus_i \mathbb{C}\alpha_i$ mit linear unabhängigen α_i ist, kann man also mit der Argumentation von oben die Existenz entsprechenden Mannigfaltigkeiten relativer Ruhelagen beweisen. Allerdings ist diese Bedingung in diesem Fall nicht unbedingt generisch für alle ξ erfüllt:

Die Normalformentheorie aus [DM93] liefert hier im generischen Fall eine Zerlegung in symplektisch irreduzible G -Darstellungen, die als komplexe Vektorräume aufgefasst werden können, auf denen $\omega = \langle \cdot, i \cdot \rangle$ und $D^2H(0) = a\mathbb{1}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt. Diese irreduziblen G -Darstellungen lassen sich nun wieder in irreduzible T -Darstellungen (*Gewichte*) zerlegen. Falls in einer der irreduziblen G -Darstellungen ein Gewicht mehrfach auftritt, erhält man zwangsläufig Kerne, die mehrere Kopien dieses Gewichts enthalten. Für die Elemente $\xi \in \mathfrak{t}$ aus den entsprechenden Hyperebenen, ist die Bedingung also verletzt.

Für generische invariante Hamiltonfunktionen H gilt aber, dass die Bedingung für alle anderen $\xi \in \mathfrak{t}$ erfüllt ist. Man erhält dann also Mannigfaltigkeiten von relativen Ruhelagen zu den Schnitten von Hyperebenen zu nicht mehrfach auftretenden Gewichten. Die G -Orbits der gefundenen relativen Ruhelagen zur T -Wirkung bilden dann relative Ruhelagen für die G -Wirkung. Es kann dabei passieren, dass man dabei die zuvor gefundenen periodischen Orbits erhält. Vermutung: Das passiert genau im Schnitt von Hyperebenen, die durch die Wirkung der Weyl-Gruppe aufeinander abgebildet werden.

Anhang

Reduktion mit dem Splitting Lemma

Das Splitting Lemma ist eine Verallgemeinerung des Morse-Lemmas. Wir brauchen die hier die Version für G -invariante Funktionen. Ein Beweis für eine entsprechende Version des Morse-Lemmas findet sich in [Ar76], ähnlich beweist man die folgende Verallgemeinerung für parameterabhängige Funktionen:

Lemma 2 (Äquivariantes Splitting Lemma). *V und Λ seien G -Darstellungen, $f \in C^\infty(V \times \Lambda, \mathbb{R})$ sei G -invariant, $(0, \lambda_0)$ sei ein kritischer Punkt von f und die Hessematrix von $f(\cdot, \lambda)$ sei in 0 nicht-degeneriert. Dann gibt es einen G -äquivarianten lokalen Diffeomorphismus um $(0, \lambda_0)$ von der Form $\psi(v, \lambda) = (\psi_1(v, \lambda), \lambda)$ so dass $f \circ \psi(v, \lambda) = g(\lambda) + Q(v)$, wobei Q die nicht-degenerierte quadratische Form $\frac{1}{2}D_V^2 f(0, 0)$ und g eine glatte Funktion ist.*

Mit dem Splitting Lemma lässt sich die Suche nach Lösungen (v, η) nahe $(0, \xi)$ der Gradientengleichung

$$D_V h(v, \xi) = D(H - \mathbf{J}^\xi)(v) = 0$$

auf eine Gradientengleichung einer durch $\xi \in \mathfrak{g}$ parametrisierten Funktionenfamilie auf $V_0 := \ker D_V^2 h(0, \eta)$ für ein $\eta \in \mathfrak{g}$ zurückführen:

Da 0 ein kritischer Punkt von H ist und $D_\xi(J^\xi)(0) = 0$, ist $(0, \eta)$ ein kritischer Punkt von h . V_1 sei ein invariantes Komplement von V_0 in V . Mit

$$h(v_1, v_0, \xi) := h(v_1 + v_0, \xi)$$

für $v_1 \in V_1, v_0 \in V_0, \xi \in \mathfrak{g}$ ist $0 \in V_1$ ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von $h(\cdot, 0, \eta)$. Also gibt es einen lokalen Diffeomorphismus ψ um $(0, 0, \eta)$ von der Form

$$\psi(v_1, v_0, \xi) = (\psi_1(v_1, v_0, \xi), \xi),$$

so dass

$$h \circ \psi(v_1, v_0, \xi) = g(v_0, \xi) + Q(v_1).$$

Da $\psi(\cdot, \cdot, \xi)$ ein Diffeomorphismus ist, hat $h(\cdot, \cdot, \xi)$ genau dann in $(\psi_1(v_1, v_0, \xi), v_0)$ einen kritischen Punkt, wenn $h \circ \psi(\cdot, \cdot, \xi)$ einen kritischen Punkt in (v_1, v_0) hat. Letzteres gilt genau dann, wenn $v_1 = 0$ und v_0 kritischer Punkt von $g(\cdot, \xi)$ ist.

Topologie auf den Funktionskeimen

Wir betrachten im Folgenden die Quotiententopologie der C^2 -Topologie auf den Funktionskeimen und zeigen, dass zwei Keime in $0 \in V$, deren Taylorentwicklungen 2. Ordnung in 0 übereinstimmen, in denselben offenen Mengen liegen:

Die C^2 -Topologie auf $C^2(V, \mathbb{R})$ ist von der Metrik

$$d_2(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\|f - g\|_{2, \overline{B_n(0)}}}{1 + \|f - g\|_{2, \overline{B_n(0)}}}$$

induziert, wobei $\|\cdot\|_{2, \overline{B_n(0)}}$ die C^2 -Norm der Einschränkung auf $\overline{B_n(0)}$ ist.

Die Quotiententopologie auf der Menge der Funktionskeime besteht genau aus den Bildern von offenen Mengen unter der Projektion auf die Äquivalenzklassen. Wir nehmen nun an, dass die Taylorentwicklungen 2. Ordnung der Funktionskeime f und g in 0 übereinstimmen und dass f in einer offenen Menge U enthalten ist. Dann gibt es einen Repräsentanten \tilde{f} von f , der in einer offenen Menge \tilde{U} liegt, die auf U projiziert wird. Es sei $B_\varepsilon(\tilde{f}) \subset U$. Multipliziert man einen Repräsentanten von $h := f - g$ mit einer passenden glatten Abschneidefunktion, erhält man einen Repräsentanten \tilde{h} von h mit $\|\tilde{h}\|_{2, \overline{B_n(0)}} < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\tilde{g} := \tilde{f} + \tilde{h}$ ein Repräsentant von g mit der Eigenschaft $d_2(\tilde{f}, \tilde{g}) < \varepsilon$.

Literatur

- [Ar76] Arnold, V. I. [1976] Wave Front Evolution and Equivariant Morse Lemma. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XXIX, 557–582.
- [Bie76] Bierstone, E. [1976] Generic equivariant maps. *Real and Complex Singularities*, Proc. Ninth Nordic Summer School/ NAVF Sympos. Math. Oslo, Sijhoff & Noordhoff International Publishers, 127–161.
- [BtD85] Bröcker, T. und tom Dieck, T. [1985] *Representations of Compact Lie Groups*, Springer-Verlag New York.

- [DM93] Dellnitz, M. und Melbourne, I. [1993] Normal forms for linear Hamiltonian vector fields commuting with the action of a compact Lie group. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* Vol. 114, 235–268.
- [Fie07] M. Field [2007], *Dynamics and Symmetry*, ICP Adv. Texts in Math. Vol. 3, Imperial College Press.
- [MR-O15] Montaldi, J., Rodríguez-Olmos, M. [2015] Hamiltonian Relative Equilibria with Continuous Isotropy. preprint.
- [MRS88] Montaldi, J., Roberts, R., Stewart, N. [1988] Periodic Solutions near Equilibria of Symmetric Hamiltonian Systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 325, No. 1584, 237 – 293.