Dynamische Systeme
Vorlesung im Wintersemester 2005-06
Universität Hamburg

Prof. Roland Gunesch

Büro 107, SP Dgl. und Dynamische Systeme, Universität Hamburg, Bundesstr. 55, D-20146 Hamburg, Tel. +49-40-428385988, Fax +49-40-428385117

Einleitung

Frage: Was sind dynamische Systeme?

Antwort: Jedes zeitveränderliche System.

Deren gibt es viele: Geld auf der Bank, Populationen von biologischen Organismen, physikalische Systeme (z.B. Planeten im Sonnensystem, Pendel, ...), Systeme in der Informatik (z.B. „game of life", Computer selbst, ...) und viele mehr.

Frage: Wie beschreiben wir solch ein System mathematisch?

Antworten:

(1) Als Abbildung
$$f : X \to X$$
auf einem geeigneten Raum X.

(2) Als gewöhnliche Differentialgleichung
$$\frac{d}{dt}u = f(u)$$
bzw. Fluss
$$\varphi : \mathbb{R} \times X \to X,$$
d.h.
$$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}, \quad \varphi_0 = \mathrm{id}\,.$$
So ein Fluss läßt sich z.B. aus jeder Differentialgleichung $\frac{d}{dt}u = f(u)$ gewinnen, sofern deren Lösungen überall definiert sind. Wir können nämlich definieren $\varphi_t(u_0) := u(t)$, wobei u diejenige Lösung der Differentialgleichung $\frac{d}{dt}u = f(u)$ ist mit $u(0) = u_0$.

Dadurch lassen sich schon sehr viele interessante zeitveränderliche Systeme untersuchen.

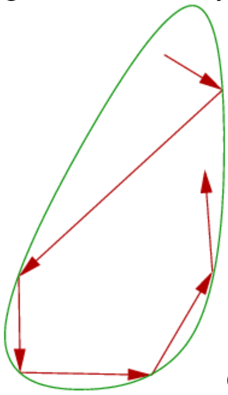
Dieses Semester können folgende Themen behandelt werden:

- *Kreisabbildungen* $f : S^1 \to S^1$.

- Gleichverteilung von Orbits: Sei $f : X \to X$ ein dynamisches System, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion (entsprechend einer „Messung" einer relevanten Größe). Dann gilt „oft", dass
$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \longrightarrow \int_X \varphi(x)d\mu(x)$$
für „gute" Maße μ auf X.

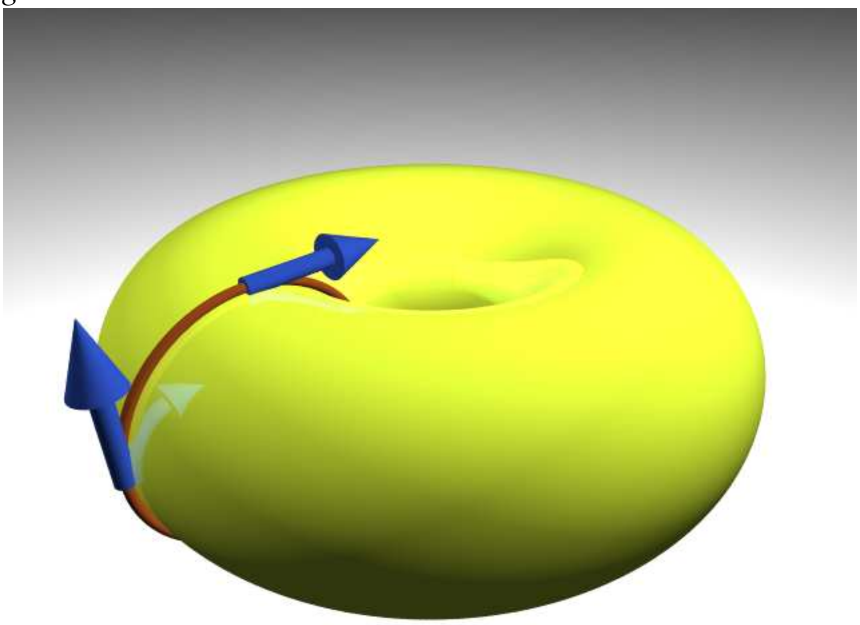
- *Mischen, Ergodizität* und verwandte Konzepte.

- geometrische Systeme, z.B. *Billiards*:



Gibt es da immer ein periodisches Orbit?

- *geodätische Flüsse*:



$$\varphi_t(v) = \dot{c}(t),$$

wobei c die „Geodätische" ist mit $\dot{c}(0) = v$. Dies entspricht der Bewegung auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit (d.h. gekrümmte „Fläche"). Sehr viele mechanische physikalische Systeme lassen sich so beschreiben.

- *Bifurkationen*: Bei Systemen $\dot{x} = f_\nu(x)$, wobei x im Phasenraum ist und die Abbildung f_ν von einem Parameter ν abhängt, ändert sich das Verhalten des Systems manchmal drastisch bei kleinen Veränderungen von ν. Dies ist interessant zu untersuchen.