Billiards

DEFINITION. Ein **Billiard** ist ein beschränktes Gebiet G im $\mathbb{R}^2$ mit glattem Rand ∂G (allgemeiner: mit stückweise glattem Rand).

DEFINITION. Auf der Menge der Einheitstangentialvektoren an $G \cup \partial G$, bezeichnet mit $T_1(G \cup \partial G)$ definieren wir einen Fluss, den **Billiard-Fluss** φ, wie folgt: Im Inneren von G besteht der Fluss aus Geradeausgehen. Und eine Trajektorie, die am Rand anstößt, wird so reflektiert, dass eingehende und ausgehende Richtung die gleichen Winkel mit der Tangente haben (die Regel „Eingangswinkel gleich Ausgangswinkel"), wobei Eingangs- und Ausgangswinkel geeignet zu interpretieren sind. Formal haben wir folgende Definition

Für $(p, v) \in T_1G$ (d.h. einen Vektor (p, v) mit Fußpunkt p im Inneren von G) definieren wir den **Billiard-Fluss** φ infinitesimal durch

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t((p, v)) := (v, 0),$$

d.h. der Fußpunkt p bewegt sich mit Geschwindigkeit v und der Vektor v ändert sich infinitesimal nicht. Für kleine t gilt dann, dass

$$\varphi_t((p, v)) = (p + tv, v).$$

Für $p \in \partial G$ und v derart, dass v ins Innere von G zeigt, definieren wir ebenfalls

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t((p, v)) := (v, 0).$$

Und für $p \in \partial G$ und v derart, dass v ins Äußere von G zeigt, definieren wir für kleine $t > 0$:

$$\varphi_t((p, v)) := (p + tw, w),$$

wobei w das Spiegelbild von v an der Tangente von ∂G ist (und somit in G hinein zeigt).

$$\varphi_t((p, v)) = (p + tv, v).$$

Für v tangential an den Rand ergeben die letzten beiden Formeln dasselbe, und deswegen ist unerheblich, welche wir wählen. Allerdings schließt die Analyse von Billiards typischerweise ohnehin aus, dass ein Orbit an einem Punkt tangential an den Rand ist, zumindest für den Fall, dass der Rand (überall) differenzierbar ist. Denn sonst läge das Orbit überall tangential an den Rand, würde also stets nur G periodisch umkreisen, was keine besonders interessante Dynamik ist.

Statt einem Fluss auf dem euklidischen Gebiet G können wir allgemeiner auch eine offene Teilmenge einer 2-dimensionalen Fläche nehmen. Das gibt auch eine sehr interessante Dynamik: Für den

Fluss im Inneren nehmen wir den *geodätischen Fluss*, den wir im folgenden noch kennenlernen (und welcher so funktioniert, dass Vektoren mit konstanter Geschwindigkeit wandern, und zwar auf „geradestmöglichen" Kurven, sogenannten *Geodätischen*). Am Rand können wir Vektoren, die tangential an die Fläche sind und aus G heraus zeigen, wie bisher so reflektieren, dass sie immer noch tangential an die Fläche sind und in G hinein zeigen. Momentan beschränken wir uns aber noch auf den euklidischen Fall, der natürlich leichter zu untersuchen ist.

Da der Rand glatt (oder zumindest stückweise glatt ist), können wir ihn parameterisieren mit einer Funktion $a : \mathbb{R}/(L\mathbb{Z}) \to \partial G$, die definiert ist auf

$$\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}) = [0, L) \quad \text{(mod L)},$$

d.h. dem Kreis der Länge L, mit $L :=$ Länge(∂G).

Definition. Statt dem Billiard-Fluss untersuchen wir meist gleich die **Billiard-Abbildung**, welche Punkten auf dem Rand des Gebiets G sowie entsprechenden Richtungen (beschrieben durch den Winkel mit der Tangente), also einem Tupel (p, θ) den Punkt p' zuordnet, an welchem der Billiard-Fluss als nächstes den Rand trifft, sowie den entsprechenden Winkel θ'. Wenn wir den Rand mit dem Parameter s parametrisieren, können wir in die Billiard-Abbildung auch gleich den Parameterwert s statt dem Punkt p einsetzen. Wir erhalten dann eine Abbildung

$$f : ([0, L) \times (0, \pi)) \to ([0, L) \times (0, \pi)),$$

wobei das Intervall $[0, L)$ zu verstehen ist „(mod L)". Hierbei ist $\theta \in (0, \pi)$ der Winkel zwischen dem Orbit von φ am Rand mit der „positiv orientierten Tangente" von ∂G.

f ist also auf einem Zylinder definiert. Dabei müssen wir uns merken, dass die Koordinate s für die zyklische und θ für die lineare Komponente steht, was anfangs etwas verwirrend scheint. (Würden wir für θ das ganze Intervall $[0, 2\pi)$ zulassen, dann wäre das natürlich auch eine zyklische Koordinate. Aber wir identifizieren θ mit $2\pi - \theta$, und das macht den Kreis zum Intervall.)

Example. Für G= die Kreisscheibe von Radius ρ haben wir $L = 2\pi\rho$ und f ist der **lineare Twist**

$$f(s, \theta) = (s + \theta, \theta),$$

denn der Winkel θ ändert sich nicht. Für diese Abbildung sind alle Kreise

$$K_c := \{(s, \theta) \,|\, s \in [0, L), \theta = c\}$$

f-invariante Mengen.

REMARK. Auch für jedes andere Billiard gilt, dass die Abbildung f eine **Twist**-Eigenschaft hat: Das Bild der senkrechten Linie $\{(0,\theta) \mid \theta \in (0,\pi)\}$ unter f ist eine Kurve, die $(0,0)$ und $(0,\pi)$ verbindet und dabei einmal in θ-Richtung um den Zylinder herumgeht.

Variationsansatz und Erzeugendenfunktion

Sei G nun ein strikt konvexes Gebiet mit überall differenzierbarem Rand.

Zuerst eine einfache Frage: Für welche Punkte p, p' gibt es ein Orbit der Billiard-Abbildung, in welchem p und p' hintereinander vorkommen?

Die Antwort ist natürlich einfach: Für alle $p \neq p'$. Das Orbit wird einfach gebildet aus der geraden Strecke zwischen p und p' (und kann vorwärts und rückwärts zu einem Orbit von unendlicher Länge fortgesetzt werden).

Als nächstes eine etwas schwierigere Frage: Wann liegen 3 Punkte p_{-1}, p_0, p_1 auf einem Orbit? Anders gefragt: Gegeben p_{-1} und p_1, für welche p_0 gilt, dass ein Orbit durch p_{-1}, p_0, p_1 geht (hintereinander und in dieser Reihenfolge)?

Darauf gibt es zwei Antworten:

(1) (Die offensichtliche Antwort:) p_0 muss so liegen, dass der Winkel der Linie von p_{-1} nach p_0 mit $T_{p_0}\partial G$ gleich dem Winkel von $T_{p_0}\partial G$ mit der Linie von p_0 nach p_1 ist.
(2) (Die Variationsantwort:) p_0 muss so liegen, dass die Summe $d(p_{-1}, p_0) + d(p_0, p_1)$ extremal wird.

Die zweite Antwort ist äquivalent zur ersten. Dies läßt sich zwar auch durch geometrische Argumente zeigen, aber wir sehen gleich einen Beweis mittels sog. Erzeugendenfunktionen.

DEFINITION. Die **Erzeugendenfunktion** des Billiards ist

$$H(s, s') = -d(a(s), a(s')).$$

EXAMPLE. Für $G =$ die Kreisscheibe mit Radius 1 ergibt sich

$$H(s, s') = -2 \sin\left(\frac{1}{2}(s' - s)\right).$$

LEMMA. *Es gelten:*

(1)
$$\frac{\partial}{\partial s'} H(s, s') = -\cos\theta',$$

(2)

$$\frac{\partial}{\partial s} H(s, s') = \cos\theta.$$

BEWEIS. Wir beweisen die erste Formel; die zweite kann analog bewiesen werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s'} H(s, s') &= -\frac{d}{ds'} d(a(s), a(s')) \\
&= -\frac{d}{ds'} \sqrt{\langle a(s') - a(s), a(s') - a(s) \rangle} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\langle a(s') - a(s), a(s') - a(s) \rangle}} \\
&\qquad \cdot \frac{d}{ds'} \langle a(s') - a(s), a(s') - a(s) \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{\|a(s') - a(s)\|} \cdot 2 \left\langle \frac{d}{ds'} a(s'), a(s') - a(s) \right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{d}{ds'} a(s'), \frac{a(s') - a(s)}{\|a(s') - a(s)\|} \right\rangle \\
&= -\cos\theta',
\end{aligned}$$

da $\frac{d}{ds'} a(s')$ ein Vektor der Länge 1 ist. □

Abgesehen von diesem algebraischen Beweis gibt es noch einen elementar-geometrischen.

Jetzt formulieren wir die Aussage von vorhin „Wenn ein Orbit durch p_{-1}, p_0, p_1 geht, muss p_0 so liegen, dass die Summe $d(p_{-1}, p_0) + d(p_0, p_1)$ extremal wird" erneut:

THEOREM. *Wenn ein Orbit der Billiard-Abbildung durch die 3 Punkte $p_{-1} = a(s_{-1})$, $p_0 = a(s_0)$, $p_1 = a(s_1)$ geht, dann ist $s = s_0$ ein kritischer Punkt des Funktionals*

$$\mathcal{L}(s) := H(s_{-1}, s) + H(s, s_1),$$

d.h.

$$\frac{d}{ds}|_{s=s_0} \mathcal{L}(s) = 0.$$

BEWEIS. Dies folgt sofort durch Zusammensetzen der beiden Formeln des Lemmas. □