Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Musterlösungen zu Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1:
Eine **Isometrie** eines metrischen Raums X ist eine Abbildung $f : X \to X$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt
$$d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Sei $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ eine Isometrie des k-Torus. Zeigen Sie: Es existiert $\delta > 0$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein ε-Pseudo-Orbit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ existiert, welches nicht von einem echten Orbit δ-beschattet wird. D.h. für jeden Punkt $y \in \mathbb{T}^k$ gibt es $i \in \mathbb{N}$ mit $d(f^i(y), x_i) > \delta$.

Lösung:
Zunächst zeigen wir die Aussage für Isometrien, die Translationen sind, d.h. es gibt es einen Translationsvektor $\gamma \in \mathbb{R}^k$, so dass f die Translation f_γ ist, mit
$$f_\gamma([x]) := [x + \gamma].$$

Sei also $f = f_\gamma$ so eine Translation $f = f_\gamma : [x] \mapsto [x + \gamma]$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{Z}$, dass
$$f^i([x]) = [x + i\gamma].$$

Sei $\delta := 1/10$. Sei e ein beliebiger Einheitsvektor im $\mathbb{R}^k$, z.b. $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig (O.B.d.A $\varepsilon < 1/10$). Definiere das Orbit $(p_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{T}^k$ durch
$$p_i := [i(\gamma + \varepsilon e)] = f^i_{\gamma+\varepsilon e}([0]).$$

Dann ist $(p_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ein Orbit von $f_{\gamma+\varepsilon e}$ auf dem Torus. Außerdem ist $(p_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ein 2ε-Pseudo-Orbit für f_γ, denn
$$\begin{aligned} d(p_{i+1}, f_\gamma(p_i)) &= d\left([(i+1)\,(\gamma + \varepsilon e)], [i(\gamma + \varepsilon e) + \gamma]\right) \\ &= \|\varepsilon e\| \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Aber $(p_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ wird nicht von einem echten Orbit beschattet, denn

$$\begin{aligned} d(p_{i+j}, f_\gamma^j(p_i)) &= d\left([(i+j)\,(\gamma+\varepsilon e)], [i(\gamma+\varepsilon e)+j\gamma]\right) \\ &= \|j\varepsilon e\| \\ &= j\varepsilon \\ &> \delta \quad \text{für } j \text{ geignet, z.B. } j = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für Translationen f gezeigt.

Nun zeigen wir die Aussage für beliebige Isometrieen:

Wenn f Isometrie des k-Torus ist, dann gibt es einen Translationsvektor $\gamma \in \mathbb{R}^k$ und eine Isometrie I des k-Würfels $[0,1]^k$, so dass f die Verkettung der Torus-Translation f_γ und I ist, d.h.

$$f([x]) = [I(x)+\gamma].$$

Jede Isometrie des k-Würfels bildet Eckpunkte auf Eckpunkte ab. Außerdem ist diese Isometrie eine Verkettung von starren Drehungen und Spiegelungen. Es gibt also nur endlich viele Isometrien des k-Würfels. Diese sind außerdem Bijektionen. Also ist

$$I^m = \mathrm{id}$$

für ein $m \in \mathbb{N}$. Daraus und aus der Gleichung $f([x]) = [I(x)+\gamma]$ folgt, dass f^m eine Translation ist. Deshalb ist die Behauptung für f^m schon gezeigt. Damit gilt sie automatisch auch für f, denn jedes δ-beschattende Orbit für f ist auch ein δ-beschattendes Orbit für f^m. Umgekehrt gesagt, wenn wir eine Punktefolge $(p_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ konstruiert haben, so dass $(p_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ein ε-Pseudo-Orbit für f^m ist, welches nicht von einem echten Orbit δ-beschattet wird, dann kann auch keine Punktefolge $(q_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, welche ein ε-Pseudo-Orbit für f ist, nicht von einem echten Orbit δ-beschattet werden. Wir können definieren

$$q_{mj+i} := f^j(p_i) \quad \text{für } j \in \{0,1,\dots,i-1\}.$$

Dies ist per Konstruktion ein ε-Pseudo-Orbit für f und nicht δ-beschattet von einem echten f-Orbit.

$\square$

Aufgabe 2:
a) Zeigen Sie, dass für eine Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ der Fluss des **hamiltonschen Systems**

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ -\mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{grad} H(u), \quad u \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \text{d.h.}$$

$$\frac{d}{dt}(u_1,\dots,u_{2n})^T = \left(\frac{dH}{du_{n+1}},\dots,\frac{dH}{du_{2n}},-\frac{dH}{du_1},\dots,-\frac{dH}{du_n}\right)^T,$$

volumenerhaltend ist.

Lösung:
Das zugehörige Vektorfeld

$$f(u) = \frac{d}{dt}(u_1,\dots,u_{2n}) = \left(\frac{\partial H}{\partial u_{n+1}},\dots,\frac{\partial H}{\partial u_{2n}},-\frac{\partial H}{\partial u_1},\dots,-\frac{\partial H}{\partial u_n}\right)$$

hat Divergenz

$$\mathrm{div} f = \frac{\partial^2 H}{\partial u_{n+1} du_1} + \dots + \frac{\partial^2 H}{\partial u_{2n} du_n} - \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 du_{n+1}} - \dots - -\frac{\partial^2 H}{\partial u_n du_{2n}} = 0.$$

□

b) Zeigen Sie, dass für dieses hamiltonsche System die Funktion H (genannt **Hamilton-Funktion**) selbst invariant ist.

Lösung:
Zu zeigen ist, dass $H(\varphi_t(u)) = H(u)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, wobei φ der Hamilton-Fluss ist. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(u) &= \frac{\partial H}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \dots + \frac{\partial H}{\partial u_{2n}} \dot{u}_{2n} \\ &= \frac{\partial H}{\partial u_1} \frac{\partial H}{\partial u_{n+1}} + \dots + \frac{\partial H}{\partial u_n} \frac{\partial H}{\partial u_{2n}} - \frac{\partial H}{\partial u_{n+1}} \frac{\partial H}{\partial u_1} - \dots - \frac{\partial H}{\partial u_{2n}} \frac{\partial H}{\partial u_n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

c) Zeigen Sie: Für eine Hamilton-Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ist jede Niveaumenge von H, die eine geschlossene Kurve ist und keine kritischen Punkte von H enthält, ein periodisches Orbit des hamiltonschen Systems

$$\frac{d}{dt}(u_1, u_2)^T = \left(\frac{dH}{du_2}, -\frac{dH}{du_1} \right)^T, \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

Lösung:
$M_c := f^{-1}(c)$ ist nach Voraussetzungen eine geschlossene Kurve. Zunächst ist das Vektorfeld $f(u) = \dot{u}$ tangential an die Kurve, denn $f(u)$ ist nach Konstruktion sekrecht zum Gradient von H und dieser senkrecht zu den Niveaulinien. Somit bleibt jedes Orbit, das auf M_c beginnt, auch auf M_c. Nach Voraussetzung enthält M_c keine kritischen Punkte, also ist

$$0 < \min_{u \in M_c} ||f(u)|| =: K.$$

Wegen der Annahmen an H ist diese Kurve stetig differenzierbar, hat also endliche Länge L. Somit muss das Orbit spätestens nach Zeit L/K wieder auf sich selbst treffen. Somit ist es periodisch. □

Aufgabe 3:
Sei $f : M \to M$ ein Diffeomorphismus einer Mannigfaltigkeit M. Auf $M \times [0,1]$ ist die Äquivalenzrelation $\sim$ so definiert, dass sie genau die folgenden Äquivalenzen enthält: Jeder Punkt in $M \times [0,1]$ ist zu sich selbst äquivalent, und außerdem gilt

$$\forall x \in M : \quad (x, 1) \sim (f(x), 0).$$

a) Zeigen Sie: Die Formel

$$\psi_t([(x, \theta)]) := \left[\left(f^{\lfloor t+\theta \rfloor}(x), t + \theta - \lfloor t + \theta \rfloor \right) \right]$$

mit

$$\lfloor a \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$$

definiert einen Fluss auf

$$S := (M \times [0,1])/\sim .$$

Lösung:
Erstens gilt für $\theta \in [0,1)$, dass

$$\begin{aligned}\psi_0([(x,\theta)]) &= [(f^{\lfloor 0+\theta\rfloor}(x), 0+\theta-\lfloor 0+\theta\rfloor)] \\ &= [(f^0(x), \theta - 0)] \\ &= [(x,\theta)].\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für alle $r \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$r+k-\lfloor r+k\rfloor = r - \lfloor r \rfloor.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\psi_s(\psi_t([(x,\theta)])) = \psi_s&\left(\left[\left(f^{\lfloor t+\theta\rfloor}(x), t+\theta-\lfloor t+\theta\rfloor\right)\right]\right) \\ =&\left[(f^{\lfloor s+t+\theta-\lfloor t+\theta\rfloor\rfloor}(f^{\lfloor t+\theta\rfloor}(x)), t+\theta-\lfloor t+\theta\rfloor+s-\lfloor t+\theta-\lfloor t+\theta\rfloor+s\rfloor)\right] \\ =&\left[\left(f^{\lfloor t+\theta\rfloor+\lfloor s+t+\theta\rfloor-\lfloor t+\theta\rfloor\rfloor}(x), s+t+\theta-\lfloor s+t+\theta\rfloor\right)\right] \\ =&\psi_{s+t}([(x,\theta)]).\end{aligned}$$

$\square$

b) Zeigen Sie: Das diesen Fluss erzeugende Vektorfeld $V : S \to TS = TM \times \mathbb{R}$ hat die Form

$$V \equiv (0,1).$$

Bemerkung: Dieser Fluss heißt die **Suspension** bzw. der **Suspensionsfluss** von f.

Lösung:
Das Vektorfeld V zu einem Fluss φ ist gegeben durch

$$V(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(p).$$

Sei $p = (x,\theta) \in S$. Sei zunächst θ nicht ganzzahlig. Dann ist die Funktion $t \mapsto \lfloor t+\theta\rfloor$ konstant für alle t in einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von 0. Dann ist auch $t \mapsto f^{\lfloor t+\theta\rfloor}(x)$ konstant auf U. Also gilt für alle $t \in U$, dass

$$\left(f^{\lfloor t+\theta\rfloor}(x), t+\theta-\lfloor t+\theta\rfloor\right) = (\text{const}, t+\text{const}).$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}V(p) = &\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(p) \\ =&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left[\left(f^{\lfloor t+\theta\rfloor}(x), t+\theta-\lfloor t+\theta\rfloor\right)\right] \\ =&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(f^{\lfloor t+\theta\rfloor}(x), t+\theta-\lfloor t+\theta\rfloor\right) \\ =&(0,1).\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 4:
Sei $a_n :=$ die letzte Ziffer von 2^n in Dezimaldarstellung, $b_{n,k} :=$ die letzten k Ziffern ($k \in \mathbb{N}$) von 2^n und $c_n :=$ die erste Ziffer von 2^n. Sei $d_{n,\alpha} := \alpha \cdot 2^n \pmod 1$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$).

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) a_n ist periodisch mit Periode 4 und durchläuft die Folge 2,4,8,6.

Lösung:
Wenn m durch 10 teilbar ist, dann auch $2m$. Deshalb hängt die letzte Ziffer von 2^{n+1} nur von der letzten Ziffer von 2^n ab. Es gibt nur endlich viele Kombinationen, also muss es eine Wiederholung geben und ab da ist a_n periodisch. So eine Folge heißt *präperiodisch.* Damit sie wirklich periodisch ist, muss sich a_1 wiederholen. Wegen $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 6$, $a_5 = 2 = a_1$ ist das der Fall und das Orbit ist wie angegeben. $\square$

b) $b_{n,k}$ ist periodisch für jedes k.

Lösung:
Die letzten k Ziffern von 2^{n+1} hängen ebenfalls nur von den letzten k Ziffern von 2^n ab. Also ist b_n präperiodisch. b_1 wiederholt sich für $k > 1$ aber nicht, denn $b_N = b_1 = 0\ldots02$ impliziert $b_{N-1} = 0\ldots01$ oder $b_{N-1} = 50\ldots01$, was ungerade ist und somit keine Endziffern einer Potenz von 2. $\square$

c) c_n ist periodisch mit Periode 10 und durchläuft die Folge 2,4,8,1,3,6,1,2,5,1.

Lösung:
Diese Folge sieht täuschend nach einer periodischen aus, jedoch ist $c_{46} = 7$ und nicht 6. Solche Abweichungen von dem periodischen Muster treten auch für beliebig große n auf. $\square$

d) Wenn α rational ist, dann ist die Folge $d_{n,\alpha}$ prä-periodisch.

Lösung:
$\alpha = p/q$, also hat jedes Folgenelement wieder den (ungekürzten) Nenner q und es gibt auf dem 1-Torus nur endlich viele Äquivalenzklassen davon. $\square$