Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1:
Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Die **Hausdorff-Metrik** auf der Menge der kompakten Teilmengen von X ist definiert durch

$$d_H(A, B) := \max(\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)),$$
$$\tilde{d}(A, B) := \max_{a \in A} d(a, B).$$

a) Zeigen Sie: d_H ist eine Metrik.

b) Zeigen Sie: Obige Definition von d_H ist äquivalent zu der Definition

$$d_H(A, B) := \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid A \subset \bigcup_{b \in B} B_\varepsilon(b) \text{ und } B \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a) \right\}.$$

c) Zeigen Sie: Wenn die Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von X bezüglich d_H gegen $A \subset X$ konvergiert, dann ist A gleich der Menge von Limespunkten aller bezüglich d in X konvergenter Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, für die gilt, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_i \in A_i$.

d) Zeigen Sie: Wenn die Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von X bezüglich d_H gegen $A \subset X$ konvergiert, dann ist

$$A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{j \geq i} A_j} \right).$$

Aufgabe 2:
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine invertierbare Abbildung $f : X \to X$ heißt **expansiv**, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $p, q \in X$ ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit

$$d(f^n(p), f^n(q)) > \delta.$$

Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt **expandierend**, wenn es $\mu > 1$ und $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so dass für alle $p, q \in X$ mit $d(p, q) < \varepsilon_0$ gilt

$$d(f(p), f(q)) \geq \mu d(p, q).$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Jede expansive Abbildung ist expandierend.

Aufgabe 3:
Sei Λ eine hyperbolische Menge für die Abbildung f. Beweisen Sie: $f|_\Lambda$ ist expansiv.

Aufgabe 4:
Sei auf dem 2-Torus folgende Abbildung $f_\varepsilon : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ definiert:

$$f_\varepsilon : \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + \varepsilon\cos(2\pi x_1) \\ x_1 + x_2 + \varepsilon\sin(2\pi x_1) \end{pmatrix}\right]$$

a) Zeigen Sie: Für $|\varepsilon|$ klein genug ist die Abbildung f_ε ein **Anosov**-Diffeomorphismus.

b) Geben Sie ein $c > 0$ explizit an, so dass für alle $\varepsilon \in (-c, c)$ gilt, dass f_ε ein Anosov-Diffeomorphismus ist, und beweisen Sie dies.

Abgabe: Montag, 28.6.2010, in der Vorlesung