Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Musterlösungen zu Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1:
Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Die **Hausdorff-Metrik** auf der Menge der kompakten Teilmengen von X ist definiert durch

$$d_H(A, B) := \max(\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)),$$
$$\tilde{d}(A, B) := \max_{a \in A} d(a, B).$$

a) Zeigen Sie: d_H ist eine Metrik.

Lösung:
Zur Erinnerung die Metrik-Eigenschaften:

$$\begin{array}{lrcl} (M_1) & d(x,y) & = & 0 \iff x = y \\ (M_2) & d(x,y) & = & d(y,x) \\ (M_3) & d(x,z) & \leq & d(x,y) + d(y,z). \end{array}$$

Zu (M_1): Wenn $A = B$, dann gilt für alle $a \in A$, dass $d(a, B) = 0$. Deshalb ist $\tilde{d}(A, B) = 0$. Es folgt $d_H(A, B) = 0$.

Sei umgekehrt $d_H(A, B) = 0$. Dann ist $0 = \max_{a \in A} d(a, B)$. Also gilt für alle $a \in A$, dass $d(a, B) = 0$. Es folgt $A \subset B$. Dasselbe Argument liefert auch $B \subset A$. Damit ist $A = B$ gezeigt.

(M_2) folgt sofort aus der Symmetrie des max-Operators.

Zu (M_3): Wähle beliebige kompakte Teilmengen A, B, C von X. Da für alle Elemente von X die Dreiecks-Ungleichung der Metrik d anwendbar ist, gilt diese auch für alle Elemente $a \in A, b \in B$ und $c \in C$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
d(a,c) &\leq d(a,b)+d(b,c)\\
\min_{c\in C} d(a,c) &\leq \min_{b\in B} d(a,b)+\min_{b\in B}\min_{c\in C} d(b,c)\\
\min_{c\in C} d(a,c) &\leq \min_{b\in B} d(a,b)+\min_{c\in C} d(b,c)\\
\max_{a\in A}\min_{c\in C} d(a,c) &\leq \max_{a\in A}\min_{b\in B} d(a,b)+\min_{c\in C} d(b,c).\\
\max_{a\in A}\min_{c\in C} d(a,c) &\leq \max_{a\in A}\min_{b\in B} d(a,b)+\max_{b\in B}\min_{c\in C} d(b,c).\\
\tilde{d}(A,C) &\leq \tilde{d}(A,B)+\tilde{d}(B,C).
\end{aligned}$$

Da wir A,B und C beliebig gewählt haben, gilt auch $\tilde{d}(C,A) \leq \tilde{d}(C,B)+\tilde{d}(B,A)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
d_H(A,C) = &\max(\tilde{d}(A,C),\tilde{d}(C,A))\\
\leq &\max\left(\tilde{d}(A,B)+\tilde{d}(B,C),\tilde{d}(C,B)+\tilde{d}(B,A)\right)\\
\leq &\max(\left(\tilde{d}(A,B),\tilde{d}(B,A)\right))+\max\left(\tilde{d}(B,C),\tilde{d}(C,B)\right)\\
= &d_H(A,B)+d_H(B,C).
\end{aligned}$$

□

b) Zeigen Sie: Obige Definition von d_H ist äquivalent zu der Definition

$$d_H(A,B) := \inf\left\{\varepsilon > 0 \mid A \subset \bigcup_{b\in B} B_\varepsilon(b) \text{ und } B \subset \bigcup_{a\in A} B_\varepsilon(a)\right\}.$$

Lösung:
Es gilt

$$\inf\left\{\varepsilon > 0 \mid A \subset \bigcup_{b\in B} B_\varepsilon(b)\right\} = \tilde{d}(A,B).$$

Damit folgt die Behauptung. □

c) Zeigen Sie: Wenn die Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von X bezüglich d_H gegen $A \subset X$ konvergiert, dann ist A gleich der Menge von Limespunkten aller bezüglich d in X konvergenter Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, für die gilt, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_i \in A_i$.

Lösung:
Seien die Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ so wie in der Aufgabenstellung. Sei a ein Limespunkt, also $a = \lim_n a_n$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$: Es gibt $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ gilt $d(a_n, a) < \varepsilon$. Daraus folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ gilt $d(a, A) < \varepsilon$. Also ist besagte Menge von Limespunkten eine Teilmenge von A.

Sei umgekehrt A der Limes der Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von X bezüglich d_H. Dann gibt es für jedes $a \in A$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ gilt

$$a \in B_\varepsilon(A_n) := \bigcup_{b\in A_n} B_\varepsilon(b).$$

Also ist A eine Teilmenge dieser Limespunkte. □

d) Zeigen Sie: Wenn die Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von X bezüglich d_H gegen $A \subset X$ konvergiert, dann ist

$$A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{j\geq i} A_j} \right).$$

Lösung:
Wir haben in der vorigen Teilaufgabe gezeigt, dass für jedes $a \in A$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ gilt

$$a \in B_\varepsilon(A_n).$$

A ist kompakt. Denn: Die ε-Überdeckung von A_n, die gegeben ist durch $\{B_\varepsilon(p)\}_{p\in A_n}$, hat wegen Kompaktheit von A_n eine endliche Teilüberdeckung mit ε-Kugeln. Verdoppelung der Radien gibt eine endliche Teilüberdeckung von A mit 2ε-Kugeln.

Wegen Kompaktheit von A gilt die Beziehung $a \in B_\varepsilon(A_n)$ auch mit a ersetzt durch A: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > N'(\varepsilon)$ gilt

$$A \subset B_\varepsilon(A_n).$$

Daraus folgt

$$A \subset \bigcup_{n>N'} B_\varepsilon(A_n).$$

Wenn $\varepsilon_k \to 0$, dann gilt

$$A \subset \bigcap_{k\to\infty} \bigcup_{n>N'(\varepsilon_k)} B_{\varepsilon_k}(A_n).$$

Nach Voraussetzun ist

$$d_H(A, B_{\varepsilon_k}(A_n)) < \varepsilon_k$$

und somit

$$d_H(A, \bigcup_{n>N'(\varepsilon_k)} B_{\varepsilon_k}(A_n)) < \varepsilon_k.$$

Der Limes $k \to \infty$ liefert das Gesuchte. □

Bemerkung: Für eine ausführlichere Darstellung der Beweise siehe Jeff Henrikson: *Completeness and Total Boundedness of the Hausdorff Metric*. MIT Undergraduate Journal of Mathematics: www-math.mit.edu/phase2/UJM/vol1/HAUSF.PDF

Aufgabe 2:
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine invertierbare Abbildung $f : X \to X$ heißt **expansiv**, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $p, q \in X$ ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit

$$d(f^n(p), f^n(q)) > \delta.$$

Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt **expandierend**, wenn es $\mu > 1$ und $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so dass für alle $p, q \in X$ mit $d(p, q) < \varepsilon_0$ gilt

$$d(f(p), f(q)) \geq \mu d(p, q).$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Jede expansive Abbildung ist expandierend.

Lösung:
Es gibt Abbildungen, die expansiv sind, aber nicht expandierend. Insbesondere gilt das für Anosov-Diffeomorphismen (mit nichttrivialer Dimension des stabilen Raums), z.B. für Arnolds Katzenabbildung auf dem 2-Torus. Diese Abbildung ist expansiv: Wenn $p, q \in \mathbb{T}^2$ verschiedene Punkte sind, die γ-nahe sind für γ klein genug, dann ist der Schnitt aus der lokalen stabilen Mannigfaltigkeit von p mit der lokalen instabilen Mannigfaltigkeit von q genau ein Punkt x.

Wenn $x \neq q$ ist, dann wächst $d(f^i(q), f^i(x))$ für $i \in \mathbb{N}$ zunächst exponentiell, und insbesondere wird dieser Term größer als $\delta + \gamma$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}$, d.h.

$$d(f^{i_0}(q), f^{i_0}(x)) > \delta + \gamma.$$

Da $x \in W^s(p)$, gilt andererseits für alle $i \in \mathbb{N}$,dass

$$d(f^i(p), f^i(x)) < \gamma.$$

Daraus folgt:

$$d(f^{i_0}(p), f^{i_0}(q)) > \delta.$$

Wenn $x = q$ ist, dann muss wegen $p \neq q$ gelten, dass $x \neq p$. Jetzt gilt ein analoges Argument wie vorhin: es wächst $d(f^{-i}(p), f^{-i}(x))$ für $i \in \mathbb{N}$ zunächst exponentiell, und insbesondere wird dieser Term größer als $\delta + \gamma$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}$, d.h.

$$d(f^{-i_0}(p), f^{-i_0}(x)) > \delta.$$

Da $x = q$, haben wir gezeigt:

$$d(f^{-i_0}(p), f^{-i_0}(q)) > \delta.$$

Also ist die Abbildung expansiv. Um zu zeigen, dass sie nicht expandierend ist, stellen wir einfach fest, dass die stabile Richtung Dimension größer 0 hat. Und für zwei (nahegelegene) Punkte p, q auf derselben stabilen Mannigfaltigkeit vergrößert sich deren Abstand unter Anwendung von f nicht, also ist f nicht expansiv. $\square$

Aufgabe 3:
Sei Λ eine hyperbolische Menge für die Abbildung f. Beweisen Sie: $f|_\Lambda$ ist expansiv.

Lösung:
Es gibt lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeiten (kleine eingebettete Scheiben) $(O^s(x))_{x\in\Lambda}$, so dass für nahegelegene $x, y \in \Lambda$ sich $O^s(x)$ und $O^u(y)$ in genau einem Punkt schneiden. Da für ε genügend klein gilt, dass für alle $x \in \Lambda$ gilt:

$$W^s_\varepsilon(x) = \left\{ y \in B_\varepsilon(x) \mid f^i(y) \in O^s_{f^i(x)} \forall i \in \mathbb{N} \right\}$$

und

$$W^u_\varepsilon(x) = \left\{ y \in B_\varepsilon(x) \mid f^{-i}(y) \in O^s_{f^{-i}(x)} \forall i \in \mathbb{N} \right\},$$

folgt daraus, dass $W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(x) = \{x\}$. Es gibt also keinen Punkt außer x, welcher in der Menge

$$\{x\} = \left\{ y \in B_\varepsilon(x) \mid f^i(y) \in O^s_{f^i(x)} \forall i \in \mathbb{Z} \right\}$$

liegt. Dies gilt für beliebiges $x \in \Lambda$. Das zeigt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 4:
Sei auf dem 2-Torus folgende Abbildung $f_\varepsilon : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ definiert:

$$f_\varepsilon : \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \mapsto \left[\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + \varepsilon \cos(2\pi x_1) \\ x_1 + x_2 + \varepsilon \sin(2\pi x_1) \end{pmatrix} \right]$$

a) Zeigen Sie: Für $|\varepsilon|$ klein genug ist die Abbildung f_ε ein **Anosov**-Diffeomorphismus.

Lösung:
Wir wissen schon, dass f_ε hyperbolisch ist. Eine äquivalente Bedingung waren die Kegelbedingungen. Diese bleiben bei kleinen Störungen erfüllt. $\square$

b) Geben Sie ein $c > 0$ explizit an, so dass für alle $\varepsilon \in (-c, c)$ gilt, dass f_ε ein Anosov-Diffeomorphismus ist, und beweisen Sie dies.

Lösung:
Für $\varepsilon = 0$ ist der größere Eigenwert der Matrix gleich

$$\mu' = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 2.$$

Somit gelten die Kegelbedingungen mit

$$\mu = \frac{\mu'+1}{2} \in (1, \mu')$$

für den δ-Kegel um die stabile Richtung für alle $\delta < 1/10$, denn wenn

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$$

mit $|b| < \delta$ und

$$A = \begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & 1/\mu' \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\|Av\| > \mu' \cdot 1 - 1/\mu' \cdot \delta > \mu\|v\|.$$

Für $\varepsilon < \frac{1}{10 \cdot 2\pi}$ ist die Ableitung der Terme $\varepsilon \cos(2\pi x_1)$ und $\varepsilon \sin(2\pi x_1)$ kleiner als $\frac{1}{10}$. Also haben wir gezeigt, dass z.B.

$$c = \frac{1}{20\pi}$$

die Anforderungen erfüllt. $\square$