

Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Musterlösungen zu Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie:

$$d_{\lambda,N}(\alpha, \omega) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda^{-|i|} |\alpha_i - \omega_i|$$

ist für jedes $\lambda > 1$ eine Metrik auf der Menge Ω_N aller **zweiseitigen Symbolsequenzen** über dem Alphabet $\{0, 1, \dots, N-1\}$.

Lösung:

$d_{\lambda,N}$ ist offensichtlich symmetrisch. Klar ist auch, dass $d_{\lambda,N}(\alpha, \alpha) = 0$.

Sei nun $d_{\lambda,N}(\alpha, \omega) = 0$. Dann sind alle Summanden Null und somit gilt $\alpha_i = \omega_i$ für alle i , also ist $\alpha = \omega$.

Wegen der Dreiecksungleichung für reelle Zahlen (hier sogar ganze Zahlen)

$$|\alpha_i - \omega_i| \leq |\alpha_i - \theta_i| + |\theta_i - \omega_i|$$

folgt durch Multiplikation mit $\lambda^{-|i|}$ und Aufsummieren über i die Dreiecksungleichung für $d_{\lambda,N}$:

$$d_{\lambda,N}(\alpha, \omega) \leq d_{\lambda,N}(\alpha, \theta) + d_{\lambda,N}(\theta, \omega).$$

□

b) Zeigen Sie: Für alle $\lambda > 2N - 1$ ist für jede Wahl von $\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ der **Zylinder**

$$Z_{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n} = \{\omega \in \Omega_N : \omega_{-n} = \alpha_{-n}, \dots, \omega_n = \alpha_n\} \subset \Omega_N$$

ein offener Ball mit Radius λ^{-n} in Ω_N bezüglich der Metrik $d_{\lambda,N}$.

Lösung:

Sei zunächst $\alpha, \omega \in Z_{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}$. Dann ist für $\lambda > 2N - 1$:

$$\begin{aligned}
 d_{\lambda, N}(\alpha, \omega) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda^{-|i|} |\alpha_i - \omega_i| \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}, i > n} \lambda^{-|i|} |\alpha_i - \omega_i| \\
 &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}, i > n} \lambda^{-|i|} (N - 1) \\
 &\leq 2(N - 1) \sum_{i \in \mathbb{N}, i > n} \lambda^{-i} \\
 &= 2(N - 1) \lambda^{-(n+1)} \frac{1}{1 - 1/\lambda} \\
 &= 2(N - 1) \lambda^{-(n+1)} \frac{\lambda}{\lambda - 1} \\
 &< \lambda^{-n}.
 \end{aligned}$$

Die Bedingung $\lambda > 2N - 1$ wurde im letzten Schritt benutzt.

Sei nun $\alpha \in Z_{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}$ und $\omega \notin Z_{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}$. Dann gibt es ein j mit $|j| \leq n$, so dass $\alpha_j \neq \omega_j$. Also ist $|\alpha_j - \omega_j| > 1$ und somit

$$\begin{aligned}
 d_{\lambda, N}(\alpha, \omega) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda^{-|i|} |\alpha_i - \omega_i| \\
 &\geq \lambda^{-|j|} |\alpha_j - \omega_j| \\
 &\geq \lambda^{-n}.
 \end{aligned}$$

□

c) Zeigen Sie: Für $\lambda > N$ ist der Zylinder $Z_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \subset \Omega_N^R$ ein offener Ball mit Radius λ^{-n} bezüglich der Metrik

$$d_{\lambda, N}(\alpha, \omega) := \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \lambda^{-i} |\alpha_i - \omega_i|$$

auf der Menge Ω_N^R aller **einseitigen Symbolsequenzen** über dem Alphabet $\{0, 1, \dots, N - 1\}$.

Lösung:

Das ist fast dieselbe Rechnung wie in der vorigen Aufgabe. Wenn $\alpha, \omega \in Z_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$, dann ist

für $\lambda > N$:

$$\begin{aligned}d_{\lambda,N}(\alpha, \omega) &= \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \lambda^{-i} |\alpha_i - \omega_i| \\&= \sum_{i \in \mathbb{N}, i > n} \lambda^{-i} |\alpha_i - \omega_i| \\&\leq \sum_{i \in \mathbb{N}, i > n} \lambda^{-i} (N - 1) \\&= (N - 1) \lambda^{-(n+1)} \frac{1}{1 - 1/\lambda} \\&= (N - 1) \lambda^{-(n+1)} \frac{\lambda}{\lambda - 1} \\&< \lambda^{-n}.\end{aligned}$$

Die Bedingung $\lambda > N$ wurde wieder im letzten Schritt benutzt.

Sei nun $\alpha \in Z_{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}$ und $\omega \notin Z_{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}$. Dann gibt es wieder ein j mit $0 \leq j \leq n$, so dass $\alpha_j \neq \omega_j$. Also ist $|\alpha_j - \omega_j| > 1$ und somit

$$\begin{aligned}d_{\lambda,N}(\alpha, \omega) &= \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \lambda^{-i} |\alpha_i - \omega_i| \\&\geq \lambda^{-|j|} |\alpha_j - \omega_j| \\&\geq \lambda^{-n}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie: Wenn $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie auf X ist, d.h. jede offene Menge U in X kann geschrieben werden als $U = \bigcup_{k \in A} U_{i_k}$ mit $A \subset \mathbb{N}$, dann genügt es, die Bedingung für topologische Transitivität für die Mengen U_i, U_j nachzuweisen.

b) Dasselbe für topologisches Mischen.

Lösung: Diese Lösung wurde in der Übung schon vorgerechnet. Eine getippte Lösung wird auch noch in einer neuen Version dieser Musterlösung stehen.

Aufgabe 3:

Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl der periodischen Punkte $\omega \in \Omega_N$ des Shift-Operators auf Ω_N , die Periode n haben und für die gilt, dass $\omega_i = 0$ für alle geraden Zahlen i .

Lösung:

Sei p_n die gesuchte Zahl. Für n ungerade kommt nur $\omega = 0$ in Frage. Für n gerade ist die Zahl gleich der Zahl der periodischen Punkte der Periode $\frac{n}{2}$ des Shift-Operators auf der ganzen Menge Ω_N , also $N^{(n/2)}$. Also ist

$$p_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \in 2\mathbb{N} \\ N^{(n/2)} & \text{für } n \in 2\mathbb{N} + 1. \end{cases}$$

□

Aufgabe 4:

a) Sei G die **G-förmige Hufeisen-Büroklammer**

$$G : \Lambda \rightarrow \Lambda, \quad G(x, y) := \begin{cases} (3x, \frac{y}{3}) & \text{für } x \leq 1/3 \\ (3x - 2, \frac{y+2}{3}) & \text{für } x \geq 2/3 \end{cases}$$

auf dem G -invarianten Cantor-Staub

$$\Lambda = C \times C = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} G^i([0, 1]^2).$$

Sei $h : \Omega \rightarrow \Lambda$ die Konjugation zwischen G und dem Shift auf Ω , definiert durch

$$\omega \mapsto h(\omega) := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G^{-n}(R_{\omega_n}),$$

wobei $R_0 = [0, \frac{1}{3}] \times [0, 1]$ und $R_1 = [\frac{2}{3}, 1] \times [0, 1]$.

Finden Sie $n \in \mathbb{N}_0$ und einen Zylinder $Z_{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n} \subset \Omega$ mit $h(Z_{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}) = \Lambda \cap R$ für das Rechteck $R = [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \times [0, \frac{1}{3}]$.

Tipp: Wenn $x \in [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}]$ und $y \in [0, \frac{1}{3}]$, welche Ziffern von x, y sind dann in der triadischen Darstellung festgelegt?

Lösung:

Wenn $x \in [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}]$, dann ist in der triadischen Darstellung

$$x = 0.20\dots$$

und wenn $y \in [0, \frac{1}{3}]$, dann gilt in der triadischen Darstellung, dass

$$y = 0.0\dots$$

Es sind also 2 (Nachkomma-)Ziffern von x und eine von y festgelegt. Insgesamt ist also der Zylinder Z durch 3 Ziffern bestimmt. Diese könnte man schon durch Ausprobieren finden (8 Kombinationen) oder durch folgende Überlegung:

- Das Bild von V_0 unter G ist $[0, 1] \times [0, \frac{1}{3}]$,
- das Bild von V_1 unter $G^0 = id$ ist $V_1 = [\frac{2}{3}, 1] \times [0, 1]$,
- das Bild von V_0 unter G^{-1} ist $([0, \frac{1}{9}] \times [0, 1]) \cup ([\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \times [0, 1])$.

Also ist

$$R = G^1(V_0) \cap G^0(V_1) \cap G^{-1}(V_0).$$

Mit anderen Worten:

$$R = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 1} G^{-n}(V_{\omega_n})$$

mit

$$\omega_{-1} = 0,$$

$$\omega_0 = 1,$$

$$\omega_1 = 0.$$

Damit gilt

$$\lambda \cap R = \left\{ \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G^{-n}(V_{\omega_n}) : \omega \text{ Fortsetzung von } \omega_{-1} = 0, \omega_0 = 1, \omega_1 = 0 \right\}.$$

Also ist der gesuchte Zylinder gleich

$$Z_{\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1} \text{ mit } \omega_{-1} = 0, \omega_0 = 1, \omega_1 = 0.$$

□