Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1:
Die Standard-**Cantormenge** ist definiert als

$$C := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^{-n} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ erfüllt } a_n \in \{0,\ 2\}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

a) Zeigen Sie: C ist überabzählbar.

b) Zeigen Sie: C ist homöomorph zum **Cantor-Staub** $C \times C$. (Zwei Mengen heißen homöomorph, wenn es eine stetige Bijektion zwischen ihnen mit stetiger Umkehrabbildung gibt.)

Aufgabe 2:
a) Die **Twistabbildung** auf dem Torus ist $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $f([(x,y)]) = [(x, y + \theta(x))]$, wobei $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, $\theta(0) - \theta(1) \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Für jede solche Funktion θ ist f volumenerhaltend.

b) Sei eine Abbildung $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ definiert durch $f([(x,y)]) = [(x, y + \theta(y))]$ mit $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, $\theta(0) - \theta(1) \in \mathbb{Z}$. Ist die Abbildung f notwendigerweise volumenerhaltend (Beweis oder Gegenbeispiel)?

Aufgabe 3:
a) Das Vektorfeld $f(v)$ definiere auf $\mathbb{R}^2$ einen für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definierten Fluss φ, so dass $\varphi_t(v_0) = v(t)$ für die Lösung v der Gleichung $\dot{v} = f(v)$, $v(0) = v_0$ gelte.

Zeigen Sie: Wenn $f(x,y) = (g(y), h(x))$, wobei $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, dann ist φ_t volumenerhaltend. Es genügt zu zeigen, dass $\operatorname{div} f = 0$.

b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist der durch das Vektorfeld

$$f(x,y) = (ax + \sin(y^{10} \cdot (\cos(y^6))^{2010} e^{-y}), by + \cos(x^{42} \sin(x^{24}) e^{e^{-x}})$$

bestimmte Fluss volumenerhaltend?

Aufgabe 4:
Sei X ein beliebiger endlicher Raum, bestehend aus $N > 1$ Punkten, versehen mit der Topologie, in der alle Teilmengen von X offen sind (die "feinste Topologie"; sie wird erzeugt durch die diskrete Metrik $d(x,y) = 1$ für alle $x \neq y$).

a) Geben Sie ein Beispiel einer topologisch transitiven Abbildung $f : X \to X$ an.

b) Bestimmen Sie die Zahl $T(N)$ aller topologisch transitiven Abbildungen $f : X \to X$.

c) Gibt es eine topologisch mischende Abbildung auf X? (Beispiel oder Gegenbeweis)

Abgabe: Donnerstag, 10.6.2010, in der Vorlesung